En esta hoja comenzamos con la mecánica celeste propiamente dicha, atacando el problema fundamental que dio origen a esta área: el problema de los dos cuerpos. Su importancia en la historia de la ciencia es difícil de exagerar. Ocupará un lugar destacado en tu TFG, por ello esta hoja es más larga.

Una pequeña cuestión de notación. Las letras en negrita indicarán vectores porque si pusiera flechas, los puntos encima de ellas quedarían muy mal.

Todos conocemos la ley de gravitación universal que afirma que entre dos masas m_1 y m_2 a distancia d siempre se produce una fuerza atractiva de módulo Gm_1m_2/d^2 con G cierta constante[1]. Digamos que sujetamos de alguna forma la primera masa en el origen y queremos estudiar cómo evoluciona la posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ de la segunda. Esto es lo que se llama a veces *problema de un cuerpo*. Aparentemente no tiene mucha realidad física (porque no podemos sujetar el Sol o un planeta) pero a partir de él se puede resolver con bastante precisión la dinámica del Sistema Solar, considerando que el Sol está inmóvil. Un primer argumento a favor de esta aproximación es que el Sol tiene una masa m_1 que es mucho mayor que la masa m_2 de cualquier planeta y por tanto la aceleración F/m_1 debida a la gravedad sobre el Sol es minúscula en comparación con F/m_2.

1) Busca las masas del Sol y la Tierra y su distancia, y calcula la aceleración debida a la gravedad para cada uno de ellos en m/s^2. Para que te hagas una idea de cuánto es esto a escala humana, piensa que cuando se te cae un objeto lo ves con aceleración $g = 9{,}8\, m/s^2$.

Este argumento admite alguna crítica, pues, como has visto en el ejercicio, también la aceleración sobre la Tierra es muy pequeña (por eso describe una curva tan amplia) y se podría pensar que con el paso de los siglos la aceleración sobre el Sol podría moverlo significativamente. Volveremos sobre ello más adelante. Por ahora seguimos con el problema de un cuerpo.

En forma vectorial, la fuerza que actúa sobre la masa $m = m_2$ y el correspondiente potencial son:

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu m}{r^3}\mathbf{r} \qquad \text{y} \qquad V = -\frac{\mu m}{r}$$

donde μ es una abreviatura más o menos usual para Gm_1 y $r = \|\mathbf{r}\|$. Si no ves obvio que $\mathbf{F}$ corresponda a la fuerza antes citada, incluido el signo, piénsalo un poco.

2) Comprueba que realmente se cumple $\mathbf{F} = -\nabla V$ y que $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, o equivalentemente $\Delta V = 0$ con Δ el Laplaciano.

El problema de un cuerpo se puede resolver de manera vectorial, con $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ y es posible organizar la solución de manera breve pero truculenta. Desde el punto de vista matemático tenemos un sistema autónomo de tres ecuaciones diferenciales acopladas. En tu trabajo quiero que plasmes la solución con la mecánica Lagrangiana. La ventaja es que no es necesario depender de trucos ni de conocimientos previos de física. Es más automática, por así decirlo.

[1] Su valor en el sistema internacional es aproximadamente $6{,}674\cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$. Es difícil de medir y hasta casi mediados del siglo XX había dudas en la tercera cifra decimal.

El Lagrangiano correspondiente al problema es:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + \frac{\mu m}{r}$$

La fuerza anterior es una fuerza central y según lo visto en la pasada hoja, el movimiento tiene lugar en un plano. Por tanto, podemos suponer $z = 0$ y pasar de (x, y) a las coordenadas polares usuales (r, θ). De esta forma,

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\big) + \frac{\mu m}{r}.$$

3) Escribe las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes.

Estas ecuaciones dan menos miedo que las originales usando vectores. Las soluciones r y θ no admiten una fórmula explícita en función de t, lo cual suena malo. Lo bonito es que, a pesar de ello, se puede demostrar que las órbitas siempre describen una cónica y que aunque la dependencia en t no sea explícita en el sentido de que se puede escribir con las funciones que aparecen en una calculadora usual, hay un algoritmo eficiente para saber con precisión qué posición corresponde a cada tiempo.

4) Parte de este programa está recogido en las tres *leyes de Kepler*. Busca su enunciado.

Nuestro objetivo será probar las leyes de Kepler a partir de las ecuaciones. Antes de empezar, hay una cosa sobre la ecuación en polares de una elipse trasladada que quizá no conozcas.

5) Prueba que para $0 \le e < 1$ la curva en polares

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos\theta} \quad \text{describe la elipse} \quad \frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $\ell = a(1 - e^2)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, la distancia focal, y $e = c/a$, la excentricidad.

En principio es algo puramente algebraico, sustituir $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, pero te puede dar algún dolor de cabeza. Si ves que te queda muy largo, trata de buscar un argumento mejor en internet o en la bibliografía.

Para $e \ge 1$ se obtienen las otras cónicas. El caso $e < 0$ se reduce a $e > 0$ simplemente cambiando de signo los ejes de coordenadas, lo que corresponde a $\theta \mapsto \theta + \pi$. Las otras cónicas aparecen también en gravitación (en análogos de la primera ley de Kepler). Corresponden por ejemplo a un asteroide que pasa cerca del Sol pero no lo suficientemente cerca o lo suficientemente lento para que lo atrape gravitatoriamente, con lo cual sigue la rama de una hipérbola o una parábola.

6) [opcional] Prueba que para $e = 1$ la fórmula anterior en polares da lugar a una parábola, concretamente $y^2 = \ell(\ell - 2x)$, y para $e > 1$ a una hipérbola, similar a al elipse anterior cambiando formalmente $b \mapsto b\sqrt{-1}$, $x \mapsto -x$ y con $\ell = a(e^2 - 1)$.

7) Lee la deducción de las dos primeras leyes de Kepler en [1]. Cuando lo escribas para tu trabajo, mejor usa la notación ℓ, como antes, en vez del p que escribí allí.

Perdón, hay un error, el valor de K_1 no es correcto. Da igual porque no se utiliza para nada. Lo menciono sobre todo para que no te confunda en el próximo ejercicio.

8) Comprueba que $\ell = K_1/K_2 = h^2/\mu$. No es necesario que calcules K_1 y K_2, es más sencillo.

Antes de deducir la tercera ley de Kepler, tenemos que ver un hecho geométrico más acerca de las elipses. Una elipse es un círculo de radio a achatado verticalmente un proporción b/a, entonces su área es $A = \pi a^2 \cdot b/a = \pi ab$.

9) Demuestra que se tiene $A = \pi a^{3/2}\ell^{1/2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\theta$.

10) Usando $r^2\dot{\theta} = h$, prueba que la integral anterior es Th donde T es el *periodo*, el tiempo que tarda en recorrerse la elipse. Sustituye $\ell = h^2/\mu$ y concluye $T^2/a^3 = 4\pi^2/\mu$, que implica la tercera ley de Kepler.

Estudiemos ahora el problema de la evolución en términos del tiempo t. Como ya te he dicho, la dependencia de r y θ en t es una función no "explícita". Entonces lo mismo ocurre con la dependencia de x e y en t cuando deshacemos el cambio a polares. La trayectoria elíptica $(x+c)^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ responderá a una fórmula del tipo (recuerda que $ae = c$ y $b = a\sqrt{1-e^2}$)

$$x(t) = a(\cos f(t) - e), \qquad y(t) = a\sqrt{1-e^2}\operatorname{sen} f(t) \tag{1}$$

donde f es una función del tiempo que queremos hallar. Resulta que, bajo el convenio $f(0) = 0$ para el origen de tiempos[2], $f(t)$ viene determinada por la *ecuación de Kepler*

$$f(t) - e\operatorname{sen} f(t) = \frac{2\pi}{T}t. \tag{2}$$

Si $e \neq 0$, esta no es una función explícita, porque no sabemos resolver de manera "exacta" la ecuación $x - A\operatorname{sen} x = B$ para $A \neq 0$, pero resulta que es fácil de calcular numéricamente, por ejemplo con el método de Newton que habrás visto en Cálculo Numérico, y eso es suficiente.

11) Busca el valor de la excentricidad e para Mercurio y, usando el método de Newton, calcula $f(T/8)$ con un error relativo menor al 1 %.

Para Mercurio, $T = 87{,}97$ días y entonces el ejercicio anterior serviría para conocer su posición unos 11 días tras su paso por el perihelio.

Curiosamente, una vez que sabemos que la trayectoria responde a la primera ley de Kepler, la ecuación (2) se sigue de manera bastante simple de la segunda ley de Kepler. Te voy a dejar

[2]Astronómicamente esto significa que se empieza a contar el tiempo en el paso por el *perihelio*, el punto de la trayectoria más cercano al Sol.

bastante libertad en esta tarea. Por si te sientes muy perdido, indico a continuación alguna referencia. Esto es muy conocido y lo puedes encontrar por doquier.

12) Busca en la bibliografía o en algún otra fuente cómo deducir (1), con f dada por (2), y escríbelo.

En [3], (1) es la Proposición 4.3 y en [4] está en §I.10. En la red, el vídeo:

`https://www.youtube.com/watch?v=xqFrLvBnBGU`

me parece que explica la ecuación de Kepler muy rápido y muy bien y solo tendrás que pensar un poco para obtener (1), que no escribe explícitamente.

Para entender las referencias es conveniente que sepas un par de cosas sobre la terminología un poco rimbombante que se usa en mecánica celeste. Recordando que T es el periodo, si la elipse fuera una circunferencia y el movimiento uniforme, en tiempo t estaría en un ángulo $2\pi t/T$, bajo el convenio de que comienza en $t = 0$ a ángulo 0. A este $2\pi t/T$, que es el segundo miembro de (2), se le llama *anomalía media* pero nosotros no queremos suponer que sea una circunferencia y buscamos una solución $f(t)$ que dé el ángulo desde el foco de la elipse, a esta solución se le llama *anomalía* a secas o *anomalía excéntrica*.

No sé si en alguna asignatura del grado te han aparecido las funciones de Bessel:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\operatorname{sen} t)\, dt.$$

Aunque esto parezca una definición rarísima, estas funciones surgen naturalmente en muchos temas de matemáticas y física. Una cosa que poca gente sabe es que Bessel las introdujo originalmente para resolver la ecuación de Kepler (2). Se prueba que los coeficientes de Fourier de la función $f(t) - \frac{2\pi}{T}t$ se escribe en términos de ellas y así se obtiene una solución en forma de serie con un aspecto muy atractivo.

13) Lee la sección 4 del artículo[3] [2] y escríbelo con la notación de esta hoja.

A pesar de que la solución exacta con funciones de Bessel es matemáticamente atractiva, desde el punto de vista numérico no es tan útil para aproximar f. La razón es que se puede probar que la convergencia absoluta de la serie resultante es más o menos como la de $\sum_{n=1}^\infty n^{-3/2}$, que no tiene parangón con la convergencia exponencial del método de Newton.

Pasamos ahora a la situación más realista de dejar dos masas libres, correspondientes al Sol y un planeta (otros ejemplos son una estrella doble o un planeta y un satélite), es el *problema de los dos cuerpos*. Resulta que con un pequeño truco matemático se reduce al problema de

[3] `https://www.jstor.org/stable/2324547?origin=crossref&seq=1#metadata_info_tab_contents` te debería dar acceso a él con el VPN de la UAM. Si tienes problemas, dímelo y te lo mando.

un cuerpo. En física este truco se justifica con las propiedades del centro de masa. Aunque sea un poco excesivo, aquí lo vamos a hacer con un enfoque matemático con Lagrangianos.

Si $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ son las posiciones de cada una de las masas m_1 y m_2, en coordenadas cartesianas, entonces el Lagrangiano del problema de los dos cuerpos es:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \|\dot{\mathbf{r}}_1\|^2 + \frac{1}{2} m_2 \|\dot{\mathbf{r}}_2\|^2 + \frac{G m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}.$$

Con un cambio de coordenadas $\mathbf{q}_1 = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{q}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ se consigue que la energía potencial sea como la del problema de un cuerpo, pero la energía cinética se estropea. Esto parece inevitable. La vía de escape es que complicando ligeramente este cambio lineal y utilizando parcialmente las ecuaciones de Euler-Lagrange, podemos conseguir que la forma en que se estropea corresponda al problema de un cuerpo cambiando el valor de la masa.

14) Escribe el Lagrangiano en términos de unas nuevas coordenadas $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_1$ relacionadas con las anteriores mediante:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{q}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{q}_2, \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{q}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{q}_2.$$

Halla las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a $\mathbf{q}_1$. Te debe salir $\ddot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{0}$.

La ecuación $\ddot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{0}$ tiene como solución general $\mathbf{q}_1 = \mathbf{a}_0 t + \mathbf{b}_0$ pero vamos a dar por hecho que $\mathbf{a}_0 = \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$, esto es, $\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$. Enseguida veremos por qué podemos hacerlo.

15) Sustituye $\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$, con ello depende de $\mathbf{q}_2$ y $\dot{\mathbf{q}}_2$, y comprueba que es el mismo Lagrangiano para el problema de un cuerpo con $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ (a esto se le llama *masa reducida*) y $\mu = G(m_1 + m_2)$.

16) Deduce, siempre bajo $\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$, que en el problema de los dos cuerpos, cada uno de ellos describe una cónica y que la recta que los une pasa por el origen.

El cabo suelto que queda es por qué no es trampa suponer $\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$, en vez de la situación general $\mathbf{q}_1 = \mathbf{a}_0 t + \mathbf{b}_0$. La respuesta que daría un físico es que las leyes físicas son iguales en todos los sistemas inerciales. Para llevarlo al terreno matemático, imagina que nos hubiera salido $\mathbf{q}_1 = \mathbf{b}_0$, entonces diríamos que situando el origen de nuestro sistema de coordenadas en $\mathbf{b}_0$, suponer $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$ es gratis (esto es lo mismo que redefinir $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1 - \mathbf{b}_0$). Si no lo hacemos, las posiciones estarán afectadas por una traslación. De la misma manera, si nos empeñamos en dejar $\mathbf{q}_1 = \mathbf{a}_0 t + \mathbf{b}_0$, las posiciones estarán afectados por una velocidad constante que traslada las elipses (cónicas, en general), pero siempre podemos correr nosotros con nuestro sistema de referencia a la misma velocidad para que nos parezca que no hay tal traslación. Por ejemplo, un sistema de referencia inercial en el centro de la Galaxia daría que el Sistema Solar se mueve a unos $300\, km/s$ pero es ridículo considerar este $\mathbf{a}_0$ para hacer cálculos dentro del Sistema Solar.

Un último cabo suelto es que estamos considerando las masas como puntuales y el radio del Sol es muy grande. A pesar de que es despreciable en comparación con la distancia a los planetas, cabe preguntarse si cambia algo. Newton demostró con gran esfuerzo e ingenio que la simetría esférica asegura que no. Hoy en día sabemos dar una demostración breve de este resultado, llamado a veces *shell theorem*, utilizando la ley de Gauss del campo gravitatorio, que depende de la comprobación $\Delta V = 0$ que has hecho al principio.

17) Lee el apartado "Derivation using Gauss's law" de [5] y escribe unas pocas líneas al respecto para tu trabajo (no hace falta que reflejes todo).

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que contenga una solución razonada del problema de los dos cuerpos combinando los ejercicios anteriores. Te sugiero una extensión de a lo más 6 páginas con el formato de esta hoja pero soy flexible. El tema de esta hoja es una parte fundamental de tu TFG y es importante que esté bien escrito. Eso no quiere decir que tengas que incluir todos los detalles de los cálculos. Intenta sintetizar lo que has aprendido con los ejercicios sin necesidad de reflejar íntegramente todas sus soluciones.

Referencias

[1] F. Chamizo. Gravitación y mecánica. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/model1415/resum01.pdf`, 2015.

[2] P. Colwell. Bessel functions and Kepler's equation. *Amer. Math. Monthly*, 99(1):45–48, 1992.

[3] H. Geiges. *The geometry of celestial mechanics*, volume 83 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[4] H. Pollard. *Celestial mechanics*, volume 18 of *Carus Mathematical Monographs*. Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1976.

[5] Wikipedia contributors. Shell theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Shell_theorem&oldid=1026107137`, 2021. [Online; accessed 9-September-2021].