Si recuerdas, de tus experimentos cuando comenzamos con la definición de las fracciones continuas dedujiste que la fracción continua de π no sigue ningún patrón (al menos que se conozca), mientras que la de e sí que tiene una estructura clara. Concretamente es

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots].$$

A veces esto se abrevia con $e = [2, \overline{1, 2n, 1}]$, con una notación fácil de interpretar.

Hay dos cosas curiosas. A pesar de que la fracción continua de e es sencilla de describir, las demostraciones conocidas no son nada directas. Por otro lado, muchas cantidades relacionados con e, por ejemplo $e^{1/3}$, $(e-1)/2$ o $\tanh(1/2)$ también admiten fracciones continuas sencillas, lo que hace suponer que hay alguna idea general que se aplica a todos los casos.

Movidos por lo dicho en el párrafo anterior, en esta hoja te voy a pedir que estudies dos pruebas de la fracción continua de e. La primera está en [1] y es la más breve y sencilla de la que tengo noticia. Por otro lado, es difícil entender su motivación y es poco generalizable (aunque existe [2]). A decir verdad, al final de [1] hay una larga discusión intentando motivar la prueba pero seguramente si nunca has oído hablar de las *aproximantes de Padé*, no creo que te inspire demasiado y no te voy a pedir que leas esa parte. La segunda prueba que vamos a considerar está en [4] y es una variante moderna de ideas clásicas que vienen desde Euler, quien ya conocía la fracción continua de e y otras relacionadas. Es más complicada que la de [1], pero tiene la ventaja de que es generalizable a cantidades relacionadas con e y a otras que no lo parecen tanto. En [3] hay más material en este sentido, por si tienes curiosidad.

Solo te propongo tres ejercicios. No deben darte una idea errónea acerca de la longitud de la hoja porque cada uno de ellos te requerirá leer y escribir unas cuantas cosas. Si se te echase el tiempo encima, te agobiara el fin de curso o tuvieras demasiado material para tu TFG, podemos reconsiderar el objetivo y quedarnos solo con una demostración, quizá con la más breve que es la que contempla el primer ejercicio.

1) Lee la prueba de la fracción continua de e incluida en §2 de [1] y escríbela con tus propias palabras explicando con cuidado todo lo que no te parezca inmediato.

Seguir los razonamientos de [1] para el ejercicio anterior no creo que sea un reto muy grande, prácticamente son todo cosas de Cálculo I. Otra cosa es que, como he dicho antes, la motivación no está muy clara. No te preocupes por ello y recuerda que no hace falta que leas esa parte.

2) Haz lo mismo con la prueba incluida en [4]. La relación entre fracciones continuas y matrices ya ha aparecido en tu trabajo y te puedes referir a ella.

Aquí el tema de la convergencia en la demostración del Teorema 1 te puede costar un poco. Trata de incluir alguna explicación adicional respecto a [4], que hace poco más que mencionar el teorema de Tannery (que es el de convergencia dominada aplicado a series).

3) Siguiendo la parte final de [4], escribe una prueba lo más breve que puedas de la fracción continua $\tan 1 = [1, 1, 1, 3, 1, 5, 1, 7 \dots]$. Para abreviar, trata $k = 1$ directamente sin considerar el caso de k general. ¿Cuántas convergentes de $5 + \tan 1$ y $\sqrt{43}$ coinciden? Esto explica que estos dos números sean tan parecidos.

Tarea a entregar. El objetivo está claro: debes escribir las dos demostraciones completas de la fracción continua de e sin apelar a resultados fuera de tu trabajo. Quizá puedes usar los epígrafes "Una prueba relacionada con las aproximantes de Padé" y "Una prueba generalizable" para separar el material de [1] y [4]. Para ilustrar que realmente la última es generalizable, debes incluir la fracción continua de $\tan 1$.

La extensión es libre. Al ser la última hoja, tendrás información para decidirte al respecto en función de cuántas páginas ocupan las secciones anteriores y de las reducciones que podrías hacer, por ejemplo relegando algunas figuras o programas de tu trabajo a un apéndice.

Referencias

[1] H. Cohn. A short proof of the simple continued fraction expansion of e. *Amer. Math. Monthly*, 113(1):57–62, 2006.

[2] T. J. Osler. A proof of the continued fraction expansion of $e^{1/M}$. *Amer. Math. Monthly*, 113(1):62–66, 2006.

[3] A. J. van der Poorten. Continued fraction expansions of values of the exponential function and related fun with continued fractions. *Nieuw Arch. Wisk. (4)*, 14(2):221–230, 1996.

[4] R. F. C. Walters. Alternative derivation of some regular continued fractions. *J. Austral. Math. Soc.*, 8:205–212, 1968.