En la hoja anterior habíamos introducido la serie

$$F_{s,D} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot(\pi n\sqrt{D})}{n^s},$$

con $D \in \mathbb{Z}^+$ que no sea cuadrado perfecto, y habíamos visto que converge para $s > 2$ y diverge para $s \leq 1$. Nos queda por analizar el intervalo $1 < s \leq 2$. Con este propósito vamos a introducir una nueva serie relacionada con la función que da la "distancia con signo" al entero más cercano:

$$\langle x \rangle_* = x - \lfloor x + 1/2 \rfloor.$$

Te recomiendo que dibujes o, al menos imagines la gráfica de $\langle x \rangle_*$ para asegurarte de que entiendes en qué sentido es la distancia con signo. Se cumple $\langle x \rangle = |\langle x \rangle_*|$ con la notación de la hoja anterior.

La nueva serie es un modelo para $F_{s,D}$ sin las complicaciones de la cotangente definido por:

$$G_{s,D} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s \langle n\sqrt{D} \rangle_*}.$$

Una serie similar se estudia en el artículo [3] de los años 60 cambiando $\langle n\sqrt{D} \rangle_*$ por potencias arbitrarias de $\langle nx \rangle$. A mi juicio, ese artículo complica más las cosas de lo que es necesario. Por tanto no te sugiero que lo mires a no ser que tengas mucha curiosidad, a pesar de que aquí manejaremos ideas similares.

**1)** Halla una constante $C$ tal que $\left|\pi \cot(\pi x) - \langle x \rangle_*^{-1}\right| < C$ y utiliza este resultado para probar que dado $s > 1$, $F_{s,D}$ converge si y solo si $G_{s,D}$ converge. Si te atascas buscando una $C$ explícita, prueba al menos que existe.

A partir de ahora, sin indicarlo cada vez, supondremos $s > 1$, que es el rango de convergencia de ambas series. La clave para probar la convergencia de $G_{s,D}$ es una fórmula para aproximar sus sumas parciales por medio de fracciones continuas. Esencialmente todo está en el caso $k = 1$ de [1, Prop. 3.1], pero familiarizarte con la notación y seguir los razonamientos sintéticos incluidos allí creo que te llevaría demasiado trabajo. Por eso, en vez de pedirte leerlo, descompondré una versión equivalente en ejercicios. No obstante, no tengo ningún inconveniente en que consultes [1] si te resulta de ayuda.

A pesar de algunas reducciones que he incorporado, la prueba es todavía técnica en el sentido de que hay unos cuantos resultados menores que se necesitan para ajustar los razonamientos. La dificultad (creo que alta) de esta hoja radica en controlar muchos detalles. No te pierdas en los lemas técnicos e intenta ver el esquema general. La idea intuitiva para probar la convergencia de $G_{s,D}$ es que $\sqrt{D}$ se parece mucho a sus convergentes y por tanto es de esperar que la mayor contribución a la serie $G_{s,D}$ venga de los $n$ que son múltiplos pequeños de sus denominadores. Concretamente, de los elementos del conjunto

$$\mathcal{A} = \big\{ n \in \mathbb{Z} \,:\, 1 < q_j \le n < q_{j+1} \text{ con } q_j \mid n \text{ para cierto } j \big\},$$

donde aquí y en el resto de la hoja $p_j/q_j$ son las convergentes de $\sqrt{D}$.

La demostración de la convergencia consta de dos pasos. Primero veremos que la contribución que pensamos que domina constituye una serie convergente. Esto es,

$$G^0_{s,D} = \sum_{n\in\mathcal{A}} \frac{1}{n^s\langle n\sqrt{D}\rangle_*} \quad \text{converge.} \tag{1}$$

Después mostraremos que los términos omitidos no causan problemas. Concretamente,

$$E_j = \sum_{\substack{n>q_j\\ n\notin\mathcal{A}}} \frac{1}{n^s\langle n\sqrt{D}\rangle} \quad \text{converge, en particular, } \lim_{j\to\infty} E_j = 0. \tag{2}$$

Nota que en esta última suma aparece $\langle n\sqrt{D}\rangle$, sin el asterisco. Por otra parte, en realidad podría haber escrito toda la serie sin la limitación $n > q_j$. Es equivalente. He definido $E_j$ de esta forma para que $E_j \to 0$ dé más idea de que esos términos no alteran la convergencia y de que, numéricamente, cuando hay cocientes parciales grandes, $G^0_{s,D}$ da una contribución mayor, aunque eso no lo probaremos aquí.

**2)** Explica por qué de (1) y (2) se deduce la convergencia de $G_{s,D}$. Esto es fácil y en la línea de lo explicado en el párrafo anterior, pero no es totalmente trivial.

Para probar (1) vamos a evaluar, en cierto sentido, las sumas parciales de $G^0_{s,D}$. Con este fin, introducimos

$$A_j(N) = \sum_{\substack{n=q_j\\ q_j\mid n}}^{N-1} \frac{1}{n^s\langle n\sqrt{D}\rangle_*} \qquad \text{donde} \quad 1 < q_j < N \le q_{j+1}.$$

**3)** A partir de la expresión que conoces para $x - p_j/q_j$ (mira la tercera hoja), muestra que

$$q_j\langle n\sqrt{D}\rangle_* = n\langle q_j\sqrt{D}\rangle_* \qquad \text{donde } 1 < q_j \le n < q_{j+1} \text{ y } q_j \mid n.$$

**4)** Deduce de lo anterior que

$$A_j(N) = q_j^{-s}\langle q_j\sqrt{D}\rangle_*^{-1} \sum_{m<N/q_j} m^{-s-1}$$

y concluye que $G^0_{s,D}$ converge para $s > 1$, esto es, (1). Recuerda que, según lo visto en la tercera hoja, los $q_j$ crecen de manera exponencial, al menos como $2^{(j-1)/2}$.

La demostración de (2) es más complicada. Para llevarla a cabo definimos:

$$B_j = \sum_{\substack{n=q_j \\ q_j \nmid n}}^{\lfloor q_{j+1}/2 \rfloor} \frac{1}{n^s \langle n\sqrt{D} \rangle} \qquad \text{y} \qquad C_j = \sum_{\substack{n=\lfloor q_{j+1}/2 \rfloor +1 \\ q_j \nmid n}}^{q_{j+1}-1} \frac{1}{n^s \langle n\sqrt{D} \rangle}.$$

Vamos a probar que para cada $s > 1$ existe un $K = K(s)$ tal que

$$(3) \qquad B_j \le K q_j^{1-s} \log(q_j + 1) \qquad \text{y} \qquad C_j \le K q_{j+1}^{1-s} \log(q_{j+1} + 1).$$

**5)** Explica por qué de (3) se deduce (2).

En la demostración utilizaremos dos desigualdades:

$$(4) \qquad \big| \langle x \rangle - \langle y \rangle \big| \le |x - y| \quad \text{para } x, y \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} < 2\log(N+1) \quad \text{para } N \ge 1.$$

La segunda quizá te suene, a lo mejor con otra constante. Una aproximación asintóticamente óptima [2, §2.7] está relacionada con la *constante de Euler-Mascheroni* [4]. A ver si consigues resolver el siguiente ejercicio de una manera lo más elegante posible sin indicaciones. Si te resulta difícil, pídeme ayuda. A mí me ha llevado un buen rato dar con una prueba corta.

**6)** Demuestra la primera desigualdad de (4).

**7)** Usando $(2n)^{-1} < \int_n^{n+1} x^{-1} dx$ para $n \ge 1$, que debes justificar de la manera más breve posible, concluye la segunda desigualdad de (4).

**8)** Justifica $\big| \langle n\sqrt{D} \rangle_* - \langle m\sqrt{D} \rangle_* \big| = \big| (n-m)\sqrt{D} - (k_1 - k_2) \big| \ge \langle q_j \sqrt{D} \rangle > (2q_{j+1})^{-1}$ para $n$ y $m$ enteros verificando $0 \le m < n < q_{j+1}$.

**9)** Explica por qué el ejercicio anterior implica que $\big\{ 2q_{j+1} \langle n\sqrt{D} \rangle \ : \ 1 \le n < q_{j+1} \big\}$ es un conjunto contenido en $[1, \infty)$ tal que cada intervalo $[k, k+1)$ con $k \in \mathbb{Z}^+$ contiene a lo más dos de sus elementos.

**10)** Usando $2q_{j+1} n^{-s} < 2^{s+1} q_{j+1}^{1-s}$ para $n$ en el rango de sumación de $C_j$, deduce la segunda desigualdad de (3) a partir de

$$C_j < 2^{s+1} q_{j+1}^{1-s} \sum_{q_{j+1}/2 < n < q_{j+1}} \frac{1}{2q_{j+1} \langle n\sqrt{D} \rangle} \le 2^{s+2} q_{j+1}^{1-s} \sum_{k=1}^{q_{j+1}-1} \frac{1}{k},$$

que debes justificar con el ejercicio anterior, y de (4).

**11)** Explica por qué, usando (4), para $n$ en el rango de sumación de $B_j$ se tiene

$$\big|\langle n\sqrt{D}\rangle - \langle np_j/q_j\rangle\big| < \frac{1}{2q_j} \le \frac{1}{2}\langle np_j/q_j\rangle.$$

**12)** Prueba

$$B_j < 2\sum_{\substack{n=q_j\\ q_j\nmid n}}^{\lfloor q_{j+1}/2\rfloor} \frac{1}{n^s\langle np_j/q_j\rangle} < 4q_j\log(q_j+1)\sum_{\substack{m=q_j\\ q_j|m}}^{\lfloor q_{j+1}/2\rfloor} \frac{1}{m^s}$$

y deduce de ello la primera desigualdad de (3), terminando así la prueba de la convergencia. Nota que en la última suma aparece $q_j \mid n$. No es una errata. Viene de descomponer la suma en bloques formados por números de la forma $kq_j+1,\dots,kq_j+q_j-1$ y observar que son todos mayores que $m=kq_j$. Nota también, que para estos números $\langle np_j/q_j\rangle$ alcanza cada elemento de $\{1/q_j,\dots,(q_j-1)/q_j\}$ a lo más dos veces, lo que implica que la suma de $\langle np_j/q_j\rangle^{-1}$ sobre ellos no supera el doble de $2q_j\log(q_j+1)$.

---

**Tarea a entregar.** Debes escribir un documento que pruebe la convergencia de $F_{s,D}$ para $s>1$ a través de la de $G_{s,D}$. Tienes total libertad para estructurar la demostración como prefieras cambiando de orden los ejercicios. Como ves, hay unos cuantos resultados auxiliares y no sé si el orden en el que los he ido introduciendo es el más natural.

La extensión es libre. Simplemente te recomiendo que no te pierdas demasiado en los detalles. A lo que sea secundario no merece la pena dedicarle muchas explicaciones. Es el esquema principal lo que debe quedar claro.

---

## Referencias

[1] F. Chamizo and B. Martin. The convergence of certain Diophantine series. *J. Number Theory*, 229:179–198, 2021.

[2] J. Cilleruelo and A. Córdoba. *La teoría de los números*. Biblioteca Mondadori. Mondadori España, Madrid, 1992.

[3] A. H. Kruse. Estimates of $\sum_{k=1}^{N} k^{-s}\langle kx\rangle^{-t}$. *Acta Arith*, 12:229–261, 1966/1967.

[4] Wikipedia contributors. Euler's constant – Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler%27s_constant&oldid=1072355356`, 2022. [Online; accessed 20-February-2022].