Después de darle muchas vueltas y de ser cada vez más realista, lo que vamos a ver en el tercer capítulo de tu trabajo es la relación entre la convergencia de dos familias de series y las fracciones continuas. He decidido dividir la tarea en dos hojas porque una iba a quedar demasiado larga y porque así tengo más tiempo para planear la orientación del capítulo. Además me queda la duda de si esta hoja te va resultar complicada. Si fuera el caso, dímelo y aligeraría la próxima. Conociendo tus gustos y como la convergencia a secas te puede resultar poco atrayente a no ser que te guste mucho el análisis, le he dado al capítulo cierto sesgo original de tipo computacional para que puedas evaluar explícitamente la primera familia de series y acelerar el cálculo de la segunda. A modo de aliciente que te anime a trabajar en esta hoja, en los próximos ejercicios usaremos las fracciones continuas para demostrar ciertas identidades entre las que se encuentran

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot(\pi n\sqrt{2})}{n^5} = \frac{\pi^5\sqrt{2}}{1890} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot(\pi n\sqrt{3})}{n^3} = -\frac{\pi^3\sqrt{3}}{60}.$$

Una cosa curiosa es que si uno le pregunta a WolframAlpha® acerca de estas series, dice que divergen.

Todo el material tiene que ver con [4]. Leerlo por completo estaría fuera del nivel de un trabajo de fin de grado, por ello solo te pediré que mires algunos fragmentos y he escrito [3] para explicarte cómo se deduce lo de las evaluaciones, que solo se insinúa en [4]. He utilizado a propósito un tono dirigido más a matemáticos que a estudiantes y así explicar con tus palabras [3] te requerirá cierto esfuerzo.

La familia de series que consideraremos en esta hoja es

$$F_{s,D} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot(\pi n\sqrt{D})}{n^s}$$

con s real y $D \in \mathbb{Z}^+$ que no sea un cuadrado perfecto (si lo fuera, $F_{s,D}$ no tendría sentido porque los sumandos valdrían infinito).

En lo sucesivo p_j/q_j denotarán las convergentes de $\sqrt{D}$. También se hablará de algunas "constantes" C. Supondremos, sin decirlo cada vez, que son constantes solo una vez fijado D. Es decir, $C = C(D)$.

Antes de comenzar, es conveniente que tengas presente una desigualdad trigonométrica general.

1) Prueba $|\cot(\pi x)| \le \frac{1}{2}\langle x\rangle^{-1}$ para todo $x \notin \mathbb{Z}$ donde $\langle x\rangle$ indica la distancia al entero más cercano a x. Intenta que la prueba sea breve y elegante.

Vamos ahora con la convergencia.

2) Recuerda de la hoja anterior que $|q_j\sqrt{D}-p_j| < q_j^{-1}$. Utilizando esto, demuestra que $F_{s,D}$ no converge para ningún $s \le 1$. *Indicación*: De Cálculo I debes saber que $\sum c_n$ convergente implica $c_n \to 0$.

La condición $s > 1$ no solo es necesaria sino también suficiente para la convergencia, pero eso requiere más esfuerzo. Ahora veremos un resultado parcial y en la próxima hoja completaremos la demostración.

3) Demuestra que dado D como antes, existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se verifica $\big|\cot(\pi n\sqrt{D})\big| < Cn$. *Indicación*: Con lo que sabes de fracciones continuas, prueba primero $|q\sqrt{D}-p|^{-1}q^{-1}$ está acotado superiormente para $q \in \mathbb{Z}^+$ y $p \in \mathbb{Z}$.

4) Deduce del ejercicio anterior que $F_{s,D}$ converge para cualquier $s > 2$.

El rango $1 < s \le 2$ es el que nos falta por analizar y lo trataremos en la próxima hoja.

Ahora nos centramos en $s \ge 3$ entero impar, en particular la convergencia está asegurada por el ejercicio anterior, y vamos a proceder a la evaluación de la serie. Las ideas de tal evaluación están en [5] sin detalles, en particular no se trata la convergencia. Por si tienes curiosidad, hay una estrecha relación con una famosa (aunque no tan profunda) fórmula de Ramanujan para $\zeta(2n+1)$ [1, p. 276], [2, §3]. Para no divagar, aquí seguiremos el documento [3] que he escrito. Aunque la primera sección es más que nada histórica, te recomiendo que le des un vistazo.

5) Lee la segunda sección. Si nunca has oído hablar de los números de Bernoulli, toma $B_{2n} = (2n)!f_n$ como su definición donde los f_n provienen del desarrollo de Taylor

$$\frac{t}{2}\cot\frac{t}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_n t^{2n}.$$

Para ver que lo entiendes, calcula a partir de este desarrollo f_0 y f_1 y comprueba que dan lugar a $B_0 = 1$ y $B_2 = 1/6$. Suponiendo conocido $B_4 = -1/30$ verifica el caso $m = 1$ de la tabla de la página 4.

6) En la demostración de la Proposición 2.1, explica de dónde salen las fórmulas para $\operatorname{Res}(f,n)$ y $\operatorname{Res}(f,n/z)$. Te dejo como opcional que expliques con más detalle dónde se está aplicando el teorema de los residuos y por qué la integral sobre la frontera tiende a cero.

Con esto llegamos a la tercera sección. Lo importante es que, dando por hecho que es lícito usar la ecuación funcional, entiendas que conduce a la evaluación de $F_{2m+1,D}$.

7) Escribe con tus palabras y con todo el detalle que consideres necesario la demostración de la Proposición 3.2 aplicada a $F_{2m+1,D}$.

8) Como aplicación de lo que has aprendido, demuestra las fórmulas de (1). Para algunos cálculos necesitarás un ordenador o, al menos, una calculadora. Cuando lo escribas para tu trabajo indica algunas cuentas intermedias para que se entienda qué estás haciendo.

9) Halla una fórmula general para

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot\left(\pi n\sqrt{\ell^2+1}\right)}{n^3} \qquad \text{donde } \ell \in \mathbb{Z}^+.$$

10) [opcional] Haz un programa para demostrar que la última fórmula de [3], la que tiene el $\sqrt{94}$ y los números tan grandes, es correcta.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que recoja la no convergencia de $F_{s,D}$ para $s \le 1$, la convergencia para $s > 2$, la ecuación funcional y la evaluación de $F_{2m+1,D}$ dando por hecho que la convergencia permite usar la ecuación funcional. Debes también recoger ejemplos particulares, como los de (1) u otros que te resulten más atractivos. Es fundamental que des explicaciones detalladas con tus propias palabras, asequibles a un estudiante de grado. Si esta hoja se te hace muy complicada, dímelo. La extensión es libre.

Referencias

[1] B. C. Berndt. *Ramanujan's notebooks. Part II.* Springer-Verlag, New York, 1989.

[2] B. C. Berndt and A. Straub. Ramanujan's formula for $\zeta(2n+1)$. In *Exploring the Riemann zeta function*, pages 13–34. Springer, Cham, 2017.

[3] F. Chamizo. A functional equation and some series evaluations. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/kiosk/kiosk.html`, 2019.

[4] F. Chamizo and B. Martin. The convergence of certain Diophantine series. *J. Number Theory*, 229:179–198, 2021.

[5] M. Lerch. Sur une série analogue aux fonctions modulaires. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 138:952–954, 1904.