Ya sea a través de ejemplos, experimentos o teoría, en las hojas anteriores has visto que dado un número real, las convergentes de su fracción continua, incluso las primeras, dan una aproximación bastante buena de dicho número. Parte del interés histórico de las fracciones continuas, y de su declive en los temarios tras la llegada de los ordenadores, radica en la posibilidad de cambiar números complicados por "fracciones bonitas" [1] para conseguir buenas aproximaciones de cálculos numéricos.

El punto de partida es una igualdad básica que está implícita en lo que has visto hasta ahora aunque creo que no la hemos enunciado antes. A ver si la consigues obtener sin ninguna indicación.

1) Con la notación que venimos manejando, demuestra que, si $n > 0$

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}. \tag{1}$$

Para que esta fórmula tenga sentido cuando n es arbitrariamente grande, supondremos en toda esta hoja, sin decirlo cada vez, que $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, equivalentemente, que su fracción continua es infinita. Es menos natural aproximar por fracciones un número que ya es una fracción. De todas formas, (1) sigue siendo cierta si limitamos n para que α_{n+1} tenga sentido. Por otro lado, también es válida para $n = 0$ si convenimos, como ya hicimos en otra hoja, $q_{-1} = 0$.

Hay varios corolarios que se deducen de (1) acerca del grado de aproximación que dan las convergentes. El siguiente ejercicio recoge algunos de los enunciados más comunes que suelen aparecer en la bibliografía (por ejemplo, [2], [4], [5]). Ordénalos de la forma que te parezca más conveniente a la hora de probarlos. Alguno se puede deducir de otro.

2) Demuestra a partir de (1) que para $n \geq 0$

a) $|\alpha - p_n/q_n| < a_{n+1}^{-1}q_n^{-2}$.

b) $(q_n + q_{n+1})^{-1} < |q_n\alpha - p_n| < q_n^{-1}$.

c) $2q_nq_{n+1}|\alpha - p_n/q_n| \in (1, 2)$.

Si recuerdas, hace tiempo descubriste experimentalmente que la aproximación dependía de los cocientes parciales a_n y conjeturaste que era a través de la suma. Te dije que, en general, era más preciso pensar en el producto. El siguiente ejercicio es sobre todo para tu curiosidad. Si te parece bonito, inclúyelo en tu trabajo, en otro caso olvídate de él. Dentro de la teoría no tiene tanto interés porque el ejercicio anterior da mejor información.

3) Explica por qué $q_n > a_1a_2\cdots a_n$ para $n > 1$ y deduce que $|q_n\alpha - p_n| < \prod_{k=1}^{n+1} a_k^{-1}$.

En el caso especial $1 = a_0 = a_1 = a_2 = \dots$, que corresponde a la razón áurea, la desigualdad $q_n > a_1a_2\cdots a_n$ es trivial y el ejercicio anterior no dice gran cosa. Vamos a ver que por muchos unos que haya entre los cocientes parciales, el crecimiento de los q_n es siempre exponencial, por tanto a), b) y c) aseguran que $|\alpha - p_n/q_n|$ tiende a cero muy rápido.

4) Prueba que $q_{n+2} > 2q_n$ y deduce de ello que $q_n > 2^{(n-1)/2}$ para $n > 1$.

Esta cota inferior no es tan mala como cabría esperar dado lo elemental del argumento. Dice que, salvo constantes, $\log q_n$ crece al menos como $n\sqrt{2}$ y para la razón áurea r el crecimiento es como nr. Numéricamente esto es alrededor de un 13 % de variación.

Los ejercicios anteriores han ido encaminados a ver que las convergentes aproximan bien. Ahora vamos a ver que, en cierto sentido, esta aproximación es óptima, no es posible hacerlo mejor. El resultado más limpio en este sentido es:

Se cumple $|q_n\alpha - p_n| < |q\alpha - p|$ *para cualquier* $p \in \mathbb{Z}$ *y* $1 \le q < q_n$, $n > 0$.

También es cierto que las convergentes son las únicas fracciones que tiene esta propiedad [2, Teor. 7.9] pero eso no lo veremos aquí.

5) Usando (1), muestra que el resultado también es cierto para $q = q_n$ si $p \ne p_n$.

Quizá es más atractiva la siguiente presentación algo más débil.

6) Deduce del resultado y del ejercicio anterior que para cualquier fracción irreducible p/q con $1 \le q \le q_n$, $n > 0$, se cumple

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \le \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

con igualdad si y solo si $p_n/q_n = p/q$.

Para apreciar el resultado te propongo que hagas una comprobación numérica de que es cierto para un número concreto.

7) Calcula p_8/q_8 para $\alpha = \pi/4$ (si está bien hecho debe salirte $q_8 = 32763$), haz un programa que halle

$$\min_{1 \le q < q_8} \min_{p \in \mathbb{Z}} \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

y verifica que es mayor que $|\alpha - p_8/q_8|$.

La única leve complicación es que, en principio, p puede tomar infinitos valores, todos los de $\mathbb{Z}$, y para que el programa sea eficiente hay que reducirlos a un conjunto finito lo menor posible. Por si quieres tomártelo como un reto, totalmente opcional, las fracciones p/q que dan los mínimos sucesivos según varía q entre 1 y q_8 siguen un patrón. ¿Sabrías cuál? A no ser que tengas mucho interés, no pierdas mucho tiempo con ello.

La demostración del resultado de aproximación óptima, en su forma original, es combinación de los siguientes tres ejercicios. Si te simplifica las cosas, supón $q > 1$ diciendo que el caso $q = 1$ es sencillo sin más explicaciones.

8) Deduce de (1) que $|q_n\alpha - p_n|$ decrece (estrictamente) cuando n aumenta. Explica por qué esto permite suponer $q_{n-1} < q < q_n$.

9) Justifica las identidades

$$q = \big|(pq_{n-1} - qp_{n-1})q_n - (pq_n - qp_n)q_{n-1}\big|$$

y

$$|q\alpha - p| = \big|(pq_{n-1} - qp_{n-1})(p_n - q_n\alpha) - (pq_n - qp_n)(p_{n-1} - q_{n-1}\alpha)\big|.$$

10) Termina la demostración del resultado, justificando que la primera identidad muestra que $pq_{n-1} - qp_{n-1}$ y $pq_n - qp_n$ tienen el mismo signo y, con esta información, que la segunda implica $|q\alpha - p| > |q_n\alpha - p_n|$.

La solución del último ejercicio también asegura $|q\alpha - p| > |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$ para $q_{n-1} < q < q_n$. De esto se deduce un resultado que nos habíamos dejado sin demostrar en la hoja anterior. Concretamente:

> *Si p/q es una fracción irreducible tal que $2q^2\big|\alpha - p/q\big| < 1$, necesariamente p/q es una convergente de α.*

Hay pruebas que no usan aproximación óptima, por ejemplo en [7, 21.11] y en [3, Th.7.2] (a decir verdad, en esta última hay algo que me parece dudoso).

11) Si q no fuera el denominador de una convergente de α entonces existiría un $n > 0$ tal que $q_{n-1} < q < q_n$ y se llegaría a una contradicción con la siguiente cadena de desigualdades que debes justificar:

$$1 \le |p_{n-1}q - q_{n-1}p| \le q|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| + q_{n-1}|q\alpha - p| < (q + q_{n-1})|q\alpha - p| < 1.$$

12) Si q es el denominador de una convergente, muestra que p/q es una convergente. De nuevo, si te simplifica las cosas, supón $q > 1$.

Esta hoja termina poniendo a prueba tu habilidad con las series. El siguiente problema es más difícil que los anteriores y requiere que utilices propiedades que has aprendido de las fracciones continuas y otras sobre los números de Fibonacci. Si te atascas, te daré más pistas. Yo creo que, con esfuerzo, está al alcance de tus posibilidades teniendo en cuenta lo bien que se te da sumar series.

13) Evalúa la serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \max_{1\le k\le r^{2n}} \left\{\frac{1}{\operatorname{Frac}(kr)}\right\}$$

donde r es la razón áurea y Frac indica la parte fraccionaria, por ejemplo Frac(12,6) = 0,6. Si lo haces correctamente, te debe dar $2+6/\sqrt{5}$. Este valor es un poco difícil de comprobar experimentalmente con precisión debido al crecimiento exponencial de r^{2n}. Lo menciono solo por si haces un programa.

Al resolverlo te aparecerá la sucesión de Fibonacci $\{F_n\}_{n=0}^{\infty} = \{0,1,1,2,3,5,8,\dots\}$ casi con seguridad. Recuerda[1] que las convergentes de r son $p_n/q_n = F_{n+2}/F_{n+1}$. Aquí van tres indicaciones respecto a ella que te pueden ayudar. Por supuesto, si las usas tienes que demostrarlas.

- Para $n \ge 1$ se tiene $F_{2n+1} < r^{2n} < F_{2n+2}$.
- El máximo del enunciado es igual a $rF_{2n+1} + F_{2n}$.
- La función generatriz de $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ es $f(x) = x/(1-x-x^2)$. Es decir, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ para $|x| < (\sqrt{5}-1)/2$.

El último punto es muy probable que lo hayas visto en Matemática Discreta. Una buena referencia sobre funciones generatrices es [8]. Para el primer punto te puede ser útil la famosa *fórmula de Binet* (por ejemplo, está en [4, (7.24)] y en el clásico de cálculo [6]).

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine lo que has aprendido con los ejercicios anteriores. El énfasis está en las propiedades de aproximación pero no te importe dar cierto protagonismo a la serie final porque recoge ideas acerca de ellas y porque debemos reflejar el cambio de título en los contenidos. La extensión es libre, mi recomendación es que no superes las 6 páginas con el formato de esta hoja.

Referencias

[1] F. Chamizo and D. Raboso. Fracciones bonitas. *G.I.E. Pensamiento Matemático*, 1:97–115, Oct 2011.

[2] J. Cilleruelo and A. Córdoba. *La teoría de los números.* Biblioteca Mondadori. Mondadori España, Madrid, 1992.

[1] Lo vimos en la hoja 1 aunque allí las números de Fibonacci se definieron empezando en 1 y por ello hay un desplazamiento en la n. Al terminar el trabajo hay que pensar en unificarlo.

[3] L. K. Hua. *Introduction to number theory.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982. Translated from the Chinese by P. Shiu.

[4] S. J. Miller and R. Takloo-Bighash. *An invitation to modern number theory.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006. With a foreword by P. Sarnak.

[5] H. E. Rose. *A course in number theory.* Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1994.

[6] M. Spivak. *Calculus Vol. I, II.* Editorial Reverté, Barcelona, 1984.

[7] M. Stoll. Introductory Number Theory. Course No. 100331 at Jacobs University. `https://www.mathe2.uni-bayreuth.de/stoll/lecture-notes/IntroductoryNumberTheory.pdf`, 2006.

[8] H. S. Wilf. *generatingfunctionology.* Academic Press, Inc., Boston, MA, second edition, 1994.