Si uno calcula la fracción continua de los números que aparecen habitualmente en cursos de matemáticas, como π, $\sqrt[3]{2}$, $\log 2$, etc. lo más normal es que los *cocientes parciales* (estos son los a_n, se me olvidó mencionar este nombre en la hoja anterior) no muestren ningún patrón. Hay algunas excepciones, por ejemplo el número e y todos los *irracionales cuadráticos* reales, los cuales constituyen la excepción más elegante. Como sugiere su nombre, estos son los números irracionales reales que resuelven ecuaciones $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Equivalentemente, son aquellos de la forma $A + B\sqrt{D}$ con $A, B \in \mathbb{Q}$, $D \in \mathbb{Z}^+$ donde $B \neq 0$ y D no es un cuadrado perfecto, para asegurar que no sea racional. En esta hoja, veremos que estos números tienen fracciones continuas periódicas y que además sirven para resolver una ecuación diofántica famosa.

No es difícil ver que una fracción continua *periódica pura*, es decir, con $a_{n+K} = a_n$ para todo $n \geq 0$ y cierto K, representa un irracional cuadrático α.

1) Demuéstralo. Para ello piensa que α resuelve la ecuación $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_{K-1}, \alpha]$.

Si la fracción continua es periódica pero no pura, esto es, si los cocientes parciales verifican $a_{n+K} = a_n$ para todo $n > n_0$ pero no en general, también se obtiene un irracional cuadrático β.

2) Pruébalo usando que $\beta = [a_0, \dots, a_{n_0}, \alpha]$.

El recíproco también se cumple: dado un irracional cuadrático real, siempre su fracción continua es periódica. A este resultado se le llama *teorema de Lagrange* y no es en absoluto sencillo, aunque admita una prueba elemental. Por otro lado, es fácil comprobarlo en ejemplos particulares racionalizando para poder aplicar el algoritmo de las fracciones continuas de manera exacta.

Por ejemplo, para $\alpha = \sqrt{2}$ el algoritmo es

$$\alpha_0 = \sqrt{2} \ \Rightarrow \ a_0 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 \ \Rightarrow \ a_1 = 2, \quad \alpha_2 = \frac{1}{(\sqrt{2} + 1) - 2} = \dots$$

y como $\alpha_1 = \alpha_2$, se tiene $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots]$. Esta es una fracción continua periódica pero no pura. Un ejemplo con fracción continua periódica pura es la razón áurea $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Ya vimos en la hoja anterior que era $[1, 1, 1, \dots]$.

3) Halla la fracción continua de $(3 + \sqrt{21})/2$ dando expresiones exactas para los α_j.

4) Escribe fórmulas generales para las fracciones continuas de $\sqrt{n^2 + 1}$ y de $n + \sqrt{n^2 + n}$ con $n \in \mathbb{Z}^+$.

La prueba del teorema de Lagrange es un poco fea y, sobre todo en libros antiguos, no tan breve. Para hacer el siguiente ejercicio te doy dos opciones, elige la que prefieras. La primera es que busques una prueba convencional como la de [1], [2], [3] o [5] (esta última está bastante abreviada). La segunda es que utilices la prueba muy breve del artículo[1] [4].

5) Escribe una prueba del teorema de Lagrange con todas las explicaciones que consideres necesarias.

Si te decides por la segunda opción, en la demostración hay que permitir definir fracciones continuas que comienzan con varios ceros iniciales, perdiendo la unicidad. Así $[0, 0, a_0, a_1, \dots] = [a_0, a_1, \dots]$. Admitiendo esto, la función $f(x) = x - 1$ para $x \geq 1$ y $f(x) = x/(x - 1)$ para $x < 1$ reduce en uno el primer a_j no nulo. Si ves esto claro, la prueba del teorema de Lagrange se reduce a la primera mitad de la página 172 de [4]. Es la más breve que conozco, aunque las explicaciones son algo sucintas y quizá te cueste convencerte.

Una de las aplicaciones principales de las fracciones continuas de irracionales cuadráticos, concretamente de las de $\sqrt{D}$, es la solución de la *ecuación de Pell*

$$x^2 - Dy^2 = 1 \qquad \text{donde} \quad D \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } \sqrt{D} \notin \mathbb{Z}.$$

Con un argumento basado en el principio del palomar, se prueba en teoría de números que siempre tiene solución no trivial en enteros, es decir, con $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z} - \{0\}$. De hecho siempre hay infinitas. No veo totalmente necesario incluir en tu trabajo la prueba de la existencia de al menos una solución no trivial para no dar un rodeo. Si opinas lo contrario o tienes interés, una prueba de este tipo está en [6, §21.6]. En lo que quiero que nos centremos aquí es en el algoritmo para hallar las soluciones basado en fracciones continuas. Nos fijaremos en las soluciones positivas $x, y \in \mathbb{Z}^+$ porque está claro que el resto solo requieren cambiar los signos arbitrariamente. El resultado fundamental es que las soluciones positivas (x, y) siempre provienen del numerador y el denominador de convergentes de $\sqrt{D}$. Aunque no investigaremos exactamente de qué convergentes provienen, porque haremos algo computacionalmente mejor, vamos con un problema experimental para que te hagas una idea de la situación.

6) ¿Qué convergentes p_n/q_n de $\sqrt{2}$ dan soluciones positivas $x = p_n$, $y = q_n$ de $x^2 - 2y^2 = 1$? Haz lo mismo con $\sqrt{7}$ y $x^2 - 7y^2 = 1$. No es necesario que intentes probar matemáticamente estos resultados, solo quiero que hagas los experimentos (por si quieres tomártelas como un reto, las pruebas son asequibles).

7) Sabiendo que las soluciones siempre vienen de convergentes, halla, con la ayuda de un ordenador, una solución no trivial de $x^2 - 331y^2 = 1$.

Cualquiera de ellas es tan inmensamente grande que una búsqueda directa dando valores con un ordenador, sin usar fracciones continuas, sería inviable. Si todavía no te impresiona, prueba con 2011 en lugar de 331. En teoría de números todavía no se entiende bien este

[1] En `https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.4169/amer.math.monthly.118.02.171` te lo puedes descargar, con VPN de la UAM. Si tienes problemas, te lo envío.

fenómeno de que para algunos D esporádicamente todas las soluciones sean desmesuradas. Tiene relación con problemas de factorización en ciertos anillos.

La clave por la que las soluciones siempre vengan de convergentes, está en el siguiente resultado de fracciones continuas que veremos[2] en la hoja 4 junto con otras propiedades de aproximación:

> Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es irracional y p/q es una fracción irreducible tal que $2q^2\big|\alpha - p/q\big| < 1$, necesariamente p/q es una convergente de α.

Entonces, justificar nuestro algoritmo para resolver la ecuación de Pell mediante convergentes de $\sqrt{D}$ requiere resolver el siguiente ejercicio:

8) Prueba que si (x, y) es una solución positiva de la ecuación de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$, entonces $2y^2\big|\sqrt{D} - x/y\big| = 1$. Para ello te recomiendo que consideres la factorización $(x - y\sqrt{D})(x + y\sqrt{D}) = 1$ y que distingas los casos $D \geq 4$ y $D = 2, 3$.

Ahora vamos a perfeccionar el algoritmo caracterizando todas las soluciones en términos de una sola convergente. Concretamente, probaremos:

> Sea p/q la primera convergente de $\sqrt{D}$ que cumple $p^2 - Dq^2 = 1$, entonces todas las soluciones positivas (x, y) de la ecuación de Pell vienen dadas por
> $$x + y\sqrt{D} = (p + q\sqrt{D})^n \qquad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Esto se puede escribir también como

$$x = \frac{(p + q\sqrt{D})^n + (p - q\sqrt{D})^n}{2}, \qquad y = \frac{(p + q\sqrt{D})^n - (p - q\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}.$$

Y de forma todavía más algorítmica, diciendo que todas las soluciones positivas vienen dadas por la sucesión $\big\{(x_n, y_n)\big\}_{n=1}^{\infty}$ que cumple la recurrencia

$$\begin{cases} x_{n+1} = px_n + Dqy_n, \\ y_{n+1} = qx_n + py_n, \end{cases} \qquad \text{con} \quad (x_0, y_0) = (1, 0).$$

9) Convéncete de que las tres maneras de expresar las soluciones son equivalentes.

No hace falta que reflejes este último ejercicio en tu trabajo ni en la entrega, solo que si alguna vez usas una forma de las soluciones que no sea la primera, te servirá para escribir alguna frase justificándola.

El único cabo suelto para probar el resultado anterior, en la forma $(p + q\sqrt{D})^n$, es resolver el siguiente ejercicio (si no ves claro que es lo único que falta, piénsalo antes de hacerlo):

---

[2]Mira [6, 21.11] si no quieres esperar.

10) Demuestra que si (x_1, y_1) es la solución positiva de $x^2 - Dy^2 = 1$ con $x_1 + y_1\sqrt{D}$ lo menor posible, entonces todas las soluciones positivas son $x+y\sqrt{D} = (x_1+y_1\sqrt{D})^n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$. Para ello, te sugiero proceder por reducción al absurdo: supón que hay una solución positiva $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ que no es de esta forma, elige n_1 tal que $\widetilde{x}_1+\widetilde{y}_1\sqrt{D} = (\widetilde{x}+\widetilde{y}\sqrt{D})(x_1+y_1\sqrt{D})^{-n_1}$ satisface $1 < \widetilde{x}_1 + \widetilde{y}_1\sqrt{D} < x_1 + y_1\sqrt{D}$ y prueba que $(\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_1)$ es solución positiva, lo cual contradice la definición de (x_1, y_1).

La teoría para $x^2 - Dy^2 = -1$ es muy similar a la de la ecuación de Pell con la única gran diferencia de que esta ecuación no siempre tiene solución (por ejemplo $x^2 - 3y^2 \neq -1$) y no se saben caracterizar los D para los que esto ocurre. Suponiendo que la hay, las fórmulas anteriores funcionan, prácticamente con la misma prueba, con la salvedad de restringir n a los impares. Por ejemplo, todas las soluciones positivas de $x^2 - 2y^2 = -1$ vienen dadas por

$$x + y\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n \qquad \text{con } n \text{ impar.}$$

Lo que resta de hoja, trata sobre la evaluación de una serie infinita. Aunque tiene relación con lo visto aquí, se podría pasar al capítulo siguiente si lo prefieres.

Consideremos la serie

$$S = \sum_{\substack{k=1 \\ 2\nmid k}}^{\infty} d(k)(\sqrt{2} - 1)^k$$

donde $d(k)$ indica el número de divisores (positivos) de k. Por ejemplo, $d(9) = 3$ y $d(15) = 4$. La aproximación precisa de S choca con que el cálculo de $d(k)$ requiere la factorización de k. Usando fracciones continuas, vamos ver una fórmula alternativa con fracciones continuas que elimina este problema. Dicha fórmula es:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=1 \\ 2\nmid n}}^{\infty} \frac{1}{p_n} \qquad \text{con } \frac{p_n}{q_n} \text{ las convergentes de } \sqrt{2}. \tag{1}$$

Sabemos que los p_n admiten la sencilla recurrencia $p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}$ con $p_0 = p_1 = 1$ y entonces es muy fácil aproximar S con (1) sin entrar en consideraciones aritméticas.

11) Calcula S con 8 cifras decimales correctas usando (1), explicando cómo estás seguro de que son correctas. Usa por ejemplo `sagemath` para las cuentas.

Para probar (1) emplearemos

$$2p_n = (1 + \sqrt{2})^n - (\sqrt{2} - 1)^n \qquad \text{para } n \text{ impar}$$

y la cadena de igualdades

$$\sum_{2\nmid n} \frac{1}{(1+\sqrt{2})^n - (\sqrt{2}-1)^n} = \sum_{2\nmid n} \frac{(\sqrt{2}-1)^n}{1-(\sqrt{2}-1)^{2n}} = \sum_{2\nmid n}\sum_{2\nmid m} (\sqrt{2}-1)^{nm}.$$

12) Justifica las fórmulas anteriores y combínalas para dar una demostración de (1).

El siguiente ejercicio es consecuencia de (1) usando lo dicho anteriormente sobre la solución de $x^2 - 2y^2 = -1$ (si quieres, mira [3, Lemma 7.6.23]).

13) Sea $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 49, 1681, 57121, \dots\}$ la sucesión de cuadrados de la forma $2m^2 - 1$ con $m \in \mathbb{Z}^+$. Demuestra que $S = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1/2}$.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine lo que has aprendido con los ejercicios anteriores. La extensión es libre siempre que no superes las 6 páginas con el formato de esta hoja. No te pierdas en los detalles e intenta sintetizar. De esta forma se reducirá el trabajo de ajuste final cuando termines las hojas. Los programas pueden ir en apéndices y no contar para la extensión.

Referencias

[1] J. Cilleruelo and A. Córdoba. *La teoría de los números*. Biblioteca Mondadori. Mondadori España, Madrid, 1992.

[2] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, Oxford, sixth edition, 2008. Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman, With a foreword by A. Wiles.

[3] S. J. Miller and R. Takloo-Bighash. *An invitation to modern number theory*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006. With a foreword by P. Sarnak.

[4] S. Northshield. A short proof and generalization of Lagrange's theorem on continued fractions. *Amer. Math. Monthly*, 118(2):171–175, 2011.

[5] H. E. Rose. *A course in number theory*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1994.

[6] M. Stoll. Introductory Number Theory. Course No. 100331 at Jacobs University. `https://www.mathe2.uni-bayreuth.de/stoll/lecture-notes/IntroductoryNumberTheory.pdf`, 2006.