En esta hoja vamos a ver lo correspondiente a la sección 2 de la propuesta de temario: las construcciones con reglas y compás. Aquí no podemos seguir mucho a Gauss porque parece que no se preocupa de dar una definición en [Gau86]. De hecho, si no me he despistado, sorprendentemente en toda la sección VII no hay referencias matemáticas al problema. Él se ocupa todo el rato del problema algebraico de expresar ζ como una "cadena" de ecuaciones de grados $q_1, q_2, \dots, q_s$ (en el sentido que te expliqué en la hoja anterior). En los artículos inicial y final 336 y 365, parece que tiene claro que grado dos implica construible[1] y que grado (algebraico) primo distinto de 2 implica no construible. Seguramente está apelando implícitamente a la idea que ya te mencioné de que al construir con regla y compás hacemos intersecciones de rectas y circunferencias y entonces sólo podemos construir longitudes que vengan de cadenas de ecuaciones cuadráticas.

Hay varias maneras de traducir el problema de construcción al problema algebraico. Una drástica y rápida pasa por tomar este último como definición de construible después de algunas explicaciones iniciales. Es lo que pongo en práctica en [Cha12] (p.33–34). Parece mejor, pero un poco más laborioso, definir el algoritmo de qué es construible y probar un teorema que dé la caracterización algebraica como en [Rot90] (App. p.85–89) y en [Ste89] (Ch.5, p.51–55, Ch.17 p.162–165). Nota que algunos autores definen números complejos $x + iy$ construibles como aquellos para los que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lo son y otros se limitan a reales.

1) Lee las páginas indicadas de al menos dos de estas tres referencias. Confieso que tengo cierta predilección por [Rot90] porque es breve. Dados tus gustos y que has hecho la teoría de Galois, entiendo que cuerpos, grados y extensiones son términos que no te asustan.

Tras la parte geométrica de estas lecturas, deberías saber sumar, restar, multiplicar, dividir y hacer raíces cuadradas de longitudes construibles.

2) Inventa un método sencillo para construir un segmento de longitud $\sqrt{(1+\sqrt{3})/2}$ con regla y compás.

3) Diseña métodos para construir con regla y compás los puntos $\left(\cos\frac{2\pi k}{n}, \sin\frac{2\pi k}{n}\right)$ para $0 \le k < n$ con $n = 3$ y $n = 4$. Es decir, el triángulo equilátero y el cuadrado inscritos en la circunferencia unidad.

4) Con lo que has aprendido en la hoja anterior, intenta también el caso $n = 5$ (el pentágono regular). Si no lo consigues (no es tan difícil) mira el método habitual en cualquier libro de dibujo técnico y explica por qué funciona.

---

[1] Me sorprende que ni *construible* ni *constructible* vengan en el diccionario de la RAE. Algo hay que poner aunque no lo hayan considerado los académicos.

Usando “mal” la regla y el compás se pueden resolver ecuaciones de tercer grado. No permitiremos este mal uso aunque parezca muy inocente.

5) [Opcional] Busca en internet el método de neusis para trisecar (está por ejemplo en `\https://global.britannica.com/topic/Trisecting-the-Angle-Archimedes-Method-724632` y también en [Cla84, 121]).

El teorema que anuncia Gauss es que el polígono regular de n lados es construible con regla y compás si y sólo si $n = 2^r p_1 p_2 \dots p_k$ con p_i primos distintos tales que $p_i - 1$ es una potencia de dos (llamados *primos de Fermat*). En realidad en la sección VII de [Gau86] sólo está la implicación $\Leftarrow$, que es la difícil. La implicación directa $\Rightarrow$, hoy en día mucho más fácil, no está pero Gauss afirma (Art.365) que sabe probarla con todo rigor y Gauss no era de los que marcaba faroles. El 2^r no es importante, ya que es muy fácil construir el de $2n$ lados a partir del de n y viceversa. Así que podemos suponer que n es impar.

6) Lee el Art.336 de [Gau86]. Intenta justificar (sin mirar los Art.309–310 si es posible) lo que dice al principio que, un poco adaptado y en notación moderna, es que si se tiene la factorización en primos $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, entonces existen números $m_j \in \mathbb{Z}$ tales que $2\pi/n = \sum_{j=1}^{k} m_j 2\pi/p_j^{\alpha_j}$. Explica por qué se deduce que basta estudiar sólo los polígonos con un número de lados potencia de primos. Gauss dice aquí que en realidad basta con primos pero en este punto no da una explicación completa, simplemente hay que creérselo. Es parte de la implicación indicada arriba que Gauss no incluyó en [Gau86].

7) Explica por qué si el polígono regular de p^α lados es construible, $p > 2$ primo, $\alpha > 1$, entonces también lo es el de p^2 lados.

Con todo lo visto hasta ahora, para poder restringirnos a n primo, como hace Gauss, sólo falta justificar que el polígono regular de p^2 lados con $p > 2$ primo no es construible ¿lo ves claro? Espero que tus conocimientos de álgebra lleguen para entender la siguiente explicación (esencialmente estoy siguiendo el esquema de [kle55, p.22]): Para p primo impar, el polinomio $P(x) = x^{p(p-1)} + x^{p(p-2)} + x^{p(p-3)} + \cdots + x^p + 1$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ por Eisenstein aplicado a $P(x+1)$, por tanto $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p^2}) : \mathbb{Q}] = p(p-1)$ que nunca es una potencia de dos y entonces $e^{2\pi i/p^2}$ no puede ser construible.

Ahora viene el ejercicio que me tienes que entregar.

8) Escribe en LaTeX en menos de cinco páginas las cosas que has aprendido para que conforme la sección 2 de la propuesta de temario. Debe incluir necesariamente los siguientes puntos:

- Explica lo que significa construible y su interpretación algebraica. No cargues mucho las tintas en la parte algebraica porque tu trabajo va a ir sobre todo de lo que escribió Gauss en [Gau86] y en sus tiempos nadie había definido ni cuerpos ni grados ni extensiones. Puedes saltarte demostraciones o reemplazarlas por ideas intuitivas. Escribas lo que escribas, haz hincapié en que construible equivale a que no hay una cadena de ecuaciones cuadráticas. Idealmente la conclusión debería ser algo que Gauss pudiera entender y firmar.

- Muestra la construcción de los polígonos regulares inscritos para $3 \leq n \leq 5$, quizá sin dar mucho detalle.
- Enuncia el resultado que va a probar Gauss y ponlo en relación con lo conocido antes siguiendo Art.365 [Gau86].
- Explica por qué basta limitarse a potencia de primos.
- Da la explicación moderna de por qué basta considerar el caso en que el número de lados es primos e indica que Gauss no es completo en este punto. Menciona ahora o cuando des el enunciado lo de la implicación del teorema que no incluye en [Gau86]. Si te atreves y se te ocurre, explica por qué es sencilla (sin usar teoría de Galois). Si no, ya te lo contaré yo más adelante.

Deberías incluir figuras para las construcciones. Como no tienes mucha experiencia con el LaTeX lo mismo te sirve de algo que te diga cómo lo suelo hacer yo (no aseguro que sea la mejor forma). En el preámbulo pongo

```
\usepackage{graphicx}
\usepackage{graphics}
```

Suelo crear las imágenes con programas SAGE (ya sé que suena raro y es probablemente poco eficiente), poniendo al final `P.save('nombre.eps')` si quiero guardar el gráfico `P` en formato `eps` (lo prefiero para cosas vectoriales porque da ficheros muy pequeños) como `nombre.eps`. Tú puedes crear la imagen con el programa que más te guste o tomarla de internet. Si quieres una imagen que haya aparecido en alguno de mis apuntes o charlas, te la envío sin problemas.

En el lugar en el que quiero incluir la imagen pongo

```
\begin{tabular}{c}
\includegraphics[height=110pt, keepaspectratio=true]{nombre.eps}
\end{tabular}
```

Aquí `height` es la altura con `pt` más o menos un tercio de milímetro. Elegir la altura me permite alinear más fácilmente, escribiendo varios `tabular` seguidos. Si en vez de `eps` usas `jpg`, `png` u otros, posiblemente sólo puedas compilar con PDFLaTeX.

Seguro que si preguntas a alguien que sepa más que yo de LaTeX te da consejos mejores.

Referencias

[Cha12] F. Chamizo. ¡Qué bonita es la teoría de Galois! `http://www.uam.es/fernando.chamizo/libreria//libreria.html`, 2012.

[Cla84] A. Clark. *Elements of Abstract Algebra*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, 1984.

[Gau86] C. F. Gauss. *Disquisitiones arithmeticae*. Springer-Verlag, New York, 1986. Translated and with a preface by Arthur A. Clarke, Revised by William C. Waterhouse, Cornelius Greither and A. W. Grootendorst and with a preface by Waterhouse.

[kle55] *Famous Problems and other monographs*. Chelsea Publishing Co., New York, 1955. Famous problems of elementary geometry, by F. Klein, From determinant to tensor, by W. F. Sheppard, Introduction to combinatory analysis, by P. A. MacMahon, Three lectures on Fermat's last theorem, by L. J. Mordell.

[Rot90] J. Rotman. *Galois theory*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1990.

[Ste89] I. Stewart. *Galois theory*. Chapman and Hall, Ltd., London, second edition, 1989.