Recuerda que en lo visto hasta ahora hay un cabo suelto crucial: no sabemos cómo deducir las métricas correspondientes a situaciones físicas, concretamente la métrica de Schwarzschild venía llovida del cielo. Responder a la pregunta ingenua "¿qué deben cumplir las métricas asociadas a la gravedad?" conlleva temas avanzados de geometría que tienen sus raíces en trabajos clásicos de Gauss y Riemann. Einstein, con la ayuda de un colaborador matemático (M. Grossmann), logró aprender estos temas e incorporarlos a la teoría geométrica de la gravitación que es la relatividad general.

Posiblemente esta sea la hoja que te cueste más y sin duda es la más larga. Te anticipo que puedes tomarte el tiempo que quieras. Cuando la termines ya podrás decir que tienes un trabajo sobre relatividad general. Se pueden añadir más cosas pero lo indispensable termina en esta hoja.

Por si quieres dividir la tarea en varias entregas, separo la hoja en cuatro partes. En cada una de ellas tendrás que leer algunas cosas y te propondré algún ejercicio que puedes incorporar como ejemplo.

1. La derivada covariante.

En mi opinión en demasiados textos de geometría no se deja claro que la derivada covariante encierra una idea geométrica o mecánica muy sencilla: si quiero observar la variación de algo en movimiento, su derivada, y mi sistema de referencia está también moviéndose, la derivada "de verdad" tendrá dos términos herederos de la fórmula elemental $(fg)' = f'g + gf'$, uno tomará en cuenta el movimiento observado y otra el del sistema de referencia. Esta derivada de verdad es lo que conduce a la *derivada covariante* y con mayor generalidad a las *conexiones*.

Explico la motivación y la teoría en [Cha09, §3.3] y en [Cha12, §3.3]. En el segundo caso menciono las conexiones afines, esto es como decir que en principio uno pone coeficientes arbitrarios en lo que correspondería a la variación del sistema de referencia (que no lleven a contradicción con los cambios de carta). Resulta que si uno quiere que la derivada así construida preserve en algún sentido el producto escalar, los coeficientes solo pueden ser los símbolos de Christoffel (*conexión de Levi-Civita*). Esto suena muy razonable cuando uno ve la fórmula porque a lo largo de las geodésicas las velocidades tienen derivada covariante nula, lo que refleja que las geodésicas son el análogo en variedades de las rectas.

1) Lee alguna de las referencias indicadas (o ambas o complétalas con otras). Si lo de las conexiones te parece superfluo, puedes pensar siempre en la conexión de Levi-Civita. El lema de Gauss aparece solo en [Cha12, §3.3], quizá lo conozcas de la geometría de curvas y superficies. Da al menos un vistazo al enunciado o a la idea intuitiva porque aparecerá indirectamente más tarde.

El siguiente ejercicio requiere que calcules los símbolos de Christoffel correspondientes a las coordenada polares en $\mathbb{R}^2$. Yo creo que la parte final es una buena ocasión para que pienses sobre el significado de la derivada covariante. Intenta resolverlo sin pedirme ayuda.

2) Considera en $\mathbb{R}^2$ el campo de vectores $V = \cos(\theta - \pi/4)\partial/\partial r + r^{-1}\cos(\theta + \pi/4)\partial/\partial\theta$ donde (r, θ) son las coordenadas polares. Comprueba usando estas coordenadas que la derivada covariante de este campo es nula. Intenta ahora explicar geométricamente por qué ocurre esto o más concretamente, cómo podría haberse ahorrado uno los cálculos.

3) Escribe un resumen de lo que has aprendido, incluyendo el ejercicio anterior como ejemplo. Creo que es interesante que des algún mínimo sesgo mecánico a las explicaciones. Por ejemplo, en ausencia de fuerzas $d\vec{v}/dt = \vec{0}$ implica que el movimiento de una partícula es rectilíneo y uniforme, el análogo con ligaduras en una variedad es que las trayectorias sea geodésicas que equivale a $DV/dt = 0$ donde V es el campo de vectores tangentes a lo largo de la curva.

2. El tensor de curvatura.

El objeto matemático que aparece en las ecuaciones de campo en las que se basa la relatividad general es el *tensor de Ricci* que es una versión reducida del *tensor de curvatura* o *tensor de Riemann*. Este tensor es muy complicado y se puede introducir de varias formas. La más sintética es como diferencia entre derivadas covariantes segundas. Esto está relacionado con que mide cuánto varían los vectores en transportes paralelos cíclicos infinitesimales, eso lo emparenta con la curvatura de Gauss a través del teorema de Gauss-Bonnet que quizá recuerdes. También, el tensor de curvatura mide cuánto se separan a la larga geodésicas arbitrariamente cercanas. Es en esta forma en la que aparece en las explicaciones que te propongo leer más abajo sobre las ecuaciones de campo. Hay un teorema que asegura que la métrica es plana si y solo si el tensor de Riemann se anula (creo que está en [Fra12]). Esto entronca con la motivación original de Riemann. En [Spi79] hay muy buenos y extensos comentarios acerca de la historia.

El tensor de Ricci tiene una interpretación geométrica como la variación del volumen con respecto a un espacio plano. Estoy casi seguro que en alguna ocasión escribí acerca de ello pero ahora no lo encuentro en mis apuntes (se menciona en [Wik18]).

4) Lee acerca de la motivación, definición y propiedades de los tensores de Riemann y de Ricci. Usa la bibliografía que prefieras. Si usas mis apuntes, está en [Cha12, §4.1] y en [Cha09, §4.1]. Yo creo que en la primera referencia me ha quedado mejor. Lo de la separación de las geodésicas está en [Cha12, Prop.4.2.5]. Si no lo miras ahora lo tendrás que hacer para comprender el significado de las ecuaciones de campo.

Seguramente no te llame en absoluto la atención pero en [Cha09, p.88] lo que escribo como justificación en una línea del carácter tensorial del tensor de Riemann no está tan claro y también debería haber dicho algo para aclarar que la definición tiene sentido, es decir, que existen R^i_{jkl} tales que se da la igualdad.

Te propongo dos ejercicios que se pueden hacer casi sin cuentas. Si no se te ocurre cómo, tendrás que hacer unos cuantos cálculos. Ambas maneras son lícitas pero, por supuesto, me gustaría que se te ocurriera la primera.

5) Calcula todas las componentes R^i_{j12} del tensor de curvatura para la métrica en $(\mathbb{R}^+)^2$ definida por $e^x dx^2 + dy^2$.

6) Prueba que el tensor de Ricci cumple $R_{12} = R_{21} = 0$ para cualquier métrica en $\mathbb{R}^2$ de la forma $A(x,y)dx^2 + B(x,y)dy^2$.

Te recomiendo que incluso si te has centrado en mis apuntes, a la hora de escribir mires cuantas más referencias mejor. Aparte de aprender más, te dará más opciones a la hora de elegir un enfoque.

7) Escribe una exposición de todo lo que has aprendido sobre la curvatura en variedades. Si quieres y piensas que viene al caso, incluye alguno de los ejercicios como ejemplo.

3. Las ecuaciones de campo.

Estas son las ecuaciones que responden a la pregunta ingenua al principio de esta hoja. Yo creo que la mejor explicación que he visto sobre las ecuaciones de campo es [BB06]. Aunque te suene demasiado "físico" y demasiado largo, te recomiendo que al menos le des un vistazo. En mis apuntes he escrito acerca del tema y donde creo que me ha quedado mejor es en [Cha12, pp.79–80]. Quizá te resulte más asequible que [BB06] porque es más matemático y breve aunque insisto en que [BB06] es lo mejor que conozco. Lo mío solo ocupa dos páginas pero tú tendrás que leer algo más porque es necesario entender la Proposición 4.2.5 de la sección anterior.

Hay una deducción *variacional* de las ecuaciones de campo debida a Hilbert[1] que es muy elegante. Está en varios sitios (entre ellos en mis apuntes) pero por ahora no la mires porque es un poco avanzada. En los planes iniciales estaba propuesta para una siguiente hoja. Dependiendo del tiempo y de tus propios intereses, ya veremos si nos metemos en ello.

También hay una "deducción" de las ecuaciones de campo que aparece en algunos textos basada en justificar que esencialmente la única cosa sensata con dos índices y con derivadas segundas que se puede poner, en el caso del vacío, es $R_{ij} = 0$. Ese tipo de explicaciones seguramente excede lo que tu mentalidad matemática puede tolerar. Si mal no recuerdo, esto venía en [Sok51]. Acabo de comprobar que algo de esto está en [Zee13, VI.1]. Este último libro no lo he manejado pero tengo muy buenas referencias de él. Tengo la impresión de que es un libro no muy riguroso pero con unas explicaciones muy buenas.

[1] Una duda que estuvo en el ambiente durante muchos años es si Hilbert obtuvo la ecuación fundamental de la relatividad general unos días antes que Einstein. Investigaciones actuales han dado la prioridad a Einstein [CRS97] aunque, como cabía esperar, lo que hace Hilbert es mucho más interesante desde el punto de vista matemático.

Ya estudiaste las métricas que aproximan la gravedad newtoniana, en [Cha01, pp.121–126] explico el límite newtoniano de las ecuaciones de campo comprobando que el resultado es coherente. Míralo solo si tienes interés, te aviso que la explicación requiere algo de física. Por cierto, algún argumento de este tipo se necesita para hallar la constante física que aparece en las ecuaciones de campo.

Finalmente, quiero mencionar [Gon05, §4.17] donde se cuenta ¡en 8 páginas! la relatividad especial y la general. El nivel del libro es el de la geometría de segundo. Una forma de las ecuaciones de campo en el vacío está allí aunque quizá te sea difícil reconocerla. Me parece muy original y bien explicado aunque no sé si te será útil porque se aleja un poco de lo que has aprendido y de lo que aparece en los textos. Dale un vistazo si tienes ocasión y decide si te merece la pena estudiarlo con más detalle.

8) Lee acerca de las ecuaciones de campo (sin meterte en la formulación variacional) por la fuente que te parezca más adecuada y escribe lo que has aprendido para tu trabajo. No te preocupes demasiado del $T_{\alpha\beta}$ que, según Einstein era la parte de peor calidad de las ecuaciones. Lo fundamental es que entiendas el caso $T_{\alpha\beta} = 0$ (que es el que se necesita para la métrica de Schwarzschild) y que puedas añadir unas palabras sobre la situación general. En [Cha01] escribí con un poco más extensión acerca de $T_{\alpha\beta}$ por si quieres consultarlo. Intenta no exceder mucho tres páginas aunque no te pongo una limitación clara.

Para que practiques un poco y lo incluyas si crees que viene al caso, te propongo el siguiente problema sencillo.

9) Imagina que queremos hacer una teoría general de la relatividad en n dimensiones y para ello conjeturamos unas ecuaciones de campo del tipo $R_{ij} - c_1 g_{ij} R = c_2 T_{ij}$. Si llamamos $T = g^{ij} T_{ij}$, ¿cuál es la relación entre R y T? Prueba que en el caso de las ecuaciones en el vacío, $T_{ij} = 0$, si hay soluciones con $R \neq 0$, necesariamente $c_1 = 1/n$.

4. Deducción de la métrica de Schwarzschild.

El objetivo es entender el Teorema 4.3.1 de [Cha12] con su demostración y la discusión previa acerca de la simetría radial.

10) Lee la parte mencionada dando por supuesto los cálculos de las ecuaciones de Euler-Lagrange, los símbolos de Christoffel y (4.18).

Para que veas algo relacionado con la simetría radial te propongo el siguiente caso sencillo en el plano:

11) Supongamos que en $\mathbb{R}^2$ tenemos una métrica $g_{11}(x,y)dx^2 + 2g_{12}(x,y)dxdy + g_{22}(x,y)dy^2$ tal que cada g_{ij} solo depende de $x^2 + y^2$ y que la métrica es invariante por giros en el sentido de que no varía con el cambio $(x, y) \mapsto (x\cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha, x \operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha)$ para cualquier α.

Prueba que $g_{11} = g_{22}$ y $g_{12} = 0$. Demuestra además que con un cambio de variable se puede escribir de la forma $A(r)dr + r^2 d\theta^2$. Indicación: Aquí r^2 no es $x^2 + y^2$. Toma $R^2 = x^2 + y^2$ y después haz un cambio $R = R(r)$.

Como te he dicho, no te preocupes por los largos cálculos que involucra el Teorema 4.3.1. Solo te pido que compruebes un par de ellos para que veas en qué consisten.

12) Comprueba $\Gamma^4_{24} = \Gamma^4_{42} = r^{-1}$ y $R_{12} = 0$.

Sabiendo más geometría, hay una forma de reducir bastante los cálculos del Teorema 4.3.1. Por si tienes curiosidad, la palabra clave es *formalismo de Cartan.* Aparece por ejemplo en [HT90, §11.3] y con mayor extensión en [MTW73, §14.6]. Te advierto que entenderlo no es tan sencillo, míralo solo si tienes tiempo y ganas.

13) Redacta el enunciado y la prueba del Teorema 4.3.1 con los prolegómenos que consideres necesarios. Para que resulte más original usa tus propias palabras, complétalo con los ejercicios anteriores y compara con otras fuentes de la bibliografía, como [Sch85] o [FN79].

Tarea a entregar. Como ya te he avanzado, tómate el tiempo que quieras y puedes dividir la tarea en varias entregas. También soy flexible en cuanto a la extensión aunque te recomiendo ser breve sustituyendo lo menos importante por referencias. Dependiendo de lo que tardes y de la extensión podemos plantearnos añadir más temas o no.

Referencias

[BB06] J. Baez and E.F. Bunn. The Meaning of Einstein's Equation. `http://math.ucr.edu/home/baez/einstein/einstein.pdf`, 2006.

[Cha01] F. Chamizo. Seminario 2001: Una odisea en el espacio-tiempo. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/APseminario02.pdf`, 2001.

[Cha09] F. Chamizo. Geometría IV (tensores, formas, curvatura, relatividad y todo eso). `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/apgeomiv08.pdf`, 2009.

[Cha12] F. Chamizo. Geometría Diferencial (teatro de variedades para estudiantes de máster) 2011–2012. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/APcompl_geom11.pdf`, 2012.

[CRS97] L. Corry, J. Renn, and J. Stachel. Belated decision in the Hilbert-Einstein priority dispute. *Science*, 278(5341):1270–1273, 1997.

[FN79] J. Foster and J. D. Nightingale. *A short course in general relativity.* Longman, London, 1979. Longman Mathematical Texts.

[Fra12] T. Frankel. *The geometry of physics.* Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 2012. An introduction.

[Gon05] J. Gonzalo. *Variedades y Geometría: un curso breve*, volume 64 of *Documentos de Trabajo.* Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 2005.

[HT90] L. P. Hughston and K. P. Tod. *An introduction to general relativity*, volume 5 of *London Mathematical Society Student Texts.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[MTW73] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation.* W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1973.

[Sch85] B. F. Schutz. *A First Course in General Relativity.* Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[Sok51] I. S. Sokolnikoff. *Tensor Analysis. Theory and Applications.* John Wiley & Sons, Inc., New York, N. Y.; Chapman & Hall, Ltd., London, 1951.

[Spi79] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II.* Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

[Wik18] Wikipedia contributors. Ricci curvature — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ricci_curvature&oldid=862710351`, 2018. [Online; accessed 22-February-2019].

[Zee13] A. Zee. *Einstein Gravity in a Nutshell.* Princeton University Press, 2013.