Ya hemos visto la "filosofía" que hay bajo la relatividad general pero el único indicio acerca de qué métricas son las que representan la gravedad ha sido un poco tramposo (ejercicio opcional de la hoja anterior), era buscar aquellas que dieran trayectorias parecidas a las newtonianas. Las condiciones que regulan las posibles métricas admisibles constituyen las llamadas *ecuaciones de campo* e involucran el tensor de curvatura de la variedad. El hecho es que son tan complicadas que apenas se conocen soluciones que tengan significación física. Apurando un poco, se puede decir que a escala no cosmológica solo hay dos, la *solución de Schwarzschild* y *la solución de Kerr*. La primera es la que estudiaremos en esta hoja y corresponde a la gravedad en el exterior de una masa con simetría esférica y estática (no gira). Una cosa curiosa de esta métrica es que tiene una singularidad que en principio podría aparecer en condiciones físicas extremas. Einstein originalmente creyó que tal singularidad no tenía sentido real e incluso publicó un artículo en una de las mejores revistas de matemáticas [Ein39] "demostrando" que era imposible que apareciera en la formación de objetos astronómicos. A partir de los años 60 del siglo XX se comenzó a creer que tales singularidades aparecían en los llamados *agujeros negros*, un tema central en la física contemporánea, de los cuales hay grandes evidencias incluso astronómicas. La otra solución, la de Kerr, corresponde a una masa que gira y es bastante más complicada. No la veremos en tu trabajo a no ser que tengas mucho interés. Se cree que da una representación más fidedigna de los agujeros negros que existen en la realidad.

1) Busca información y bibliografía en la red con la que escribir unas líneas (con tres o cuatro vale) acerca de la opinión de Einstein sobre los agujeros negros. Nota que muchas veces la divulgación atribuye a Einstein su descubrimiento a pesar de que negó su existencia, por tanto quizá te cueste encontrar algo. Busca también información para escribir al menos dos o tres líneas sobre la solución de Kerr.

Como ya te he dicho, las ecuaciones de campo son complicadas y hay que aprender todavía más cosas de geometría para enunciarlas y deducir la solución de Schwarzschild que es desde el punto de vista de la gravitación la "más sencilla". Para que te hagas una idea, Einstein no consiguió hallarla (fue Schwarzschild, como su nombre indica). En este hoja daremos por hecho la métrica correspondiente a la solución de Schwarzschild y estudiando sus geodésicas deduciremos algunas consecuencias físicas. Einstein, en su genialidad, conocía con gran aproximación las más relevantes incluso sin haber hallado la solución, con una combinación de argumentos matemáticos e intuitivos.

Antes de seguir te indico dos observaciones con respecto a la notación: 1) Utiliza en tu trabajo siempre la signatura $+---$, la que tiene el signo $+$ en el tiempo (opuesta a la usada en mis apuntes) porque creo que en la actualidad es la más empleada y tiene alguna ventaja. Esto no te requerirá más esfuerzo que cambiar algún signo. 2) Mi recomendación, no imposición, es que uses unidades relativistas ($c = 1$) excepto en los cálculos finales porque simplifica las fórmulas.

2) Lee en [Cha12, p.46] la definición de la métrica de Schwarzschild y pensando en las ecuaciones de Euler-Lagrange explica por qué existen geodésicas con $\theta = \theta_0$ y $\varphi = \varphi_0$ con θ_0 y φ_0 constantes cualesquiera. Esto da sentido a versión bidimensional introducida después y que también debes mirar.

Fijar θ y φ corresponde a movimientos radiales. Para partículas materiales imponemos que la geodésica esté parametrizada por longitud de arco (tiempo propio) y para la luz que sean geodésicas nulas. Para simplificar las cuentas, en el caso de las partículas materiales suponemos que se parte del reposo.

3) Lee en [Cha12, Prop.3.2.3] y [Cha12, Prop.3.2.4] el cálculo de estas geodésicas completando en ambos casos el último paso (la computación directa y el cálculo de la integral).

Salvo en condiciones extremas, la relatividad general solo añade una pequeña corrección a la teoría gravitatoria de Newton. El siguiente ejercicio va en esta línea y nos da cierta seguridad de que la métrica de Schwarzschild no da lugar a una teoría físicamente absurda.

4) Según la física que se estudia en secundaria, un objeto masivo que se suelta a una altura del suelo de 1 m, en condiciones ideales (despreciando el rozamiento), tarda $\sqrt{2/g} \approx 0{,}45\ s$ en caer. Realizando las aproximaciones que necesites y buscando el valor de G, la masa y el radio de la Tierra, muestra que lo mismo se deduce de [Cha12, Prop.3.2.3]. Nota que este resultado está en unidades relativistas, si no te sientes cómodo con ellas en [Cha09, Prop.3.2.1] está en unidades habituales. De todas formas intenta entender por ti mismo cómo se realiza este cambio.

Es más difícil comprobar que las geodésicas no radiales en condiciones no extremas son aproximadamente cónicas (elipses en el caso de los planetas). Veremos más adelante que hay cierto fenómeno no newtoniano (la rotación del perihelio) pero no probaremos la aproximación de las órbitas newtonianas porque requeriría un desvío para entender primero por qué esas órbitas describen curvas cónicas y aunque eso sea muy famoso y tenga más de 300 años, no es fácil en absoluto.

En el otro extremo está considerar qué cosas raras ocurren en condiciones extremas de gravedad. Lo más radical es el estudio en las cercanías del radio de Schwazschild donde la métrica aparentemente colapsa[1].

5) Mira los comentarios de [Cha09, p.71] acerca de cómo se comportan las geodésicas radiales cerca de la singularidad. Busca también en la red alguna información sobre el significado

[1] En realidad desde el punto de vista geométrico el colapso es aparente, es posible evitarlo con un cambio de carta ingenioso [HT90, §19]. La única singularidad real es el origen. Por si te suenan, los *diagramas de Penrose* son una forma de visualizar un cambio de carta de este tipo con propiedades especiales.

de la singularidad en los agujeros negros (de Schwarzschild). De nuevo ten precaución al buscar fuentes porque en las menos cuidadosas se dicen tonterías sobre esto.

Hay tres fenómenos predichos por la relatividad general que no tienen explicación dentro de la física newtoniana y que se consideran comprobaciones clásicas de la teoría de Einstein, son: el corrimiento hacia el rojo gravitatorio, la desviación de la luz y la precesión del perihelio de Mercurio. Los puedes encontrar en casi cualquier libro de relatividad como [FN79] [Sch85] [Wei72]. En las secciones 6, 7 y 8 de [Cha16] escribí acerca de ello y busqué unas cuantas cosas históricas, está además algo más detallado que en mis otros apuntes. En [Cha09] y en [Cha12] no trato la desviación de la luz.

6) Estos tres fenómenos se llaman a menudo "tests clásicos de la relatividad general". Con ayuda de las referencias anteriores escribe acerca de ellos. En [Wik18] hay descripciones breves de estos y otros tests más modernos.

Cuando he examinado los trabajos y opiniones de la época he encontrado discrepancias severas con lo que refleja la divulgación hoy en día. Los tres tests eran menos concluyentes de lo que parece indicarse en la actualidad. La precisión del perihelio era un efecto conocido buscado al construir la teoría, no una predicción sorpresiva y el famoso experimento que dio el espaldarazo a la relatividad sobre la desviación de la luz observada durante un eclipse ha sido puesto muchas veces en duda por su posible falta de precisión o por manipulación de los datos. En [Ken09] se afirma que sí era concluyente. Por otro lado si se hubiera realizado cuando se previó inicialmente habría sido un desastre porque entonces Einstein había predicho solo la mitad de la desviación que realmente tiene lugar.

Por otro lado, las mediciones actuales apoyan con gran precisión las predicciones de la relatividad general (en [Wil01] hay un compendio muy detallado). Hace poco se ha probado la existencia de ondas gravitacionales que era la última predicción por verificar. Es más compleja que el resto y no la veremos a no ser que tengas mucho interés.

Después de leer tantas cosas te propongo que hagas algunos ejercicios para poner en práctica lo que has aprendido.

7) Mira los ejercicios 5), 6), 7), 8), 9), 10) y 11) de la página 75 de [Cha09] y haz al menos cuatro de ellos. Para que te resulten más sencillos aquí van indicaciones de cada uno:

5. $\operatorname{sen}(\arccos y)$ se puede calcular usando $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ con $x = \arccos y$.
6. Por Taylor, si $y \sim 1$ entonces $\sqrt{y} \sim 1 + (y-1)/2$.
7. Deduce $(1-r_0/r)\dot{t} = 1$ de la ecuación de Euler-Lagrange para t y las condiciones iniciales.
8. Usa las ecuaciones de Euler-Lagrange para θ y φ para probar que la derivada es nula.
9. Emplea la regla de la cadena en la forma $\dot{\varphi}/\dot{t} = d\varphi/dt$.

10. Procede como en [Cha16].
11. El radio de Schwarzschild del Sol es $2{,}96 \cdot 10^3$ m y el radio de la Tierra $6{,}30 \cdot 10^6$ m.

Tarea a entregar. Los temas que debes incluir son:

1. Las geodésicas radiales (Prop. 3.2.1, 3.2.2 [Cha12]) con alguna referencia a la singularidad de Schwarzschild y a que no hay discrepancias significativas en experimentos terrestres de caída libre.
2. Los tres tests clásicos.
3. Soluciones de los problemas que hayas escogido.

Respecto al último punto, lo que debes hacer es incluirlos como ejemplos distribuyéndolos en el orden que prefieras en tu documento.

La extensión que te recomiendo es que todo no sobrepase las 9 páginas. Este es un límite superior, si te ocupa menos no intentes estirarlo.

Referencias

[Cha09] F. Chamizo. Geometría IV (tensores, formas, curvatura, relatividad y todo eso). http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/apgeomiv08.pdf, 2009.

[Cha12] F. Chamizo. Geometría Diferencial (teatro de variedades para estudiantes de máster) 2011–2012. http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/APcompl_geom11.pdf, 2012.

[Cha16] F. Chamizo. Post-Newtonian approximations. (Trabajo para la asignatura "Gravitation"). http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/ppn_chamizo.pdf, 2016.

[Ein39] A. Einstein. On a stationary system with spherical symmetry consisting of many gravitating masses. *Ann. of Math. (2)*, 40:922–936, 1939.

[FN79] J. Foster and J. D. Nightingale. *A short course in general relativity.* Longman, London, 1979. Longman Mathematical Texts.

[HT90] L. P. Hughston and K. P. Tod. *An introduction to general relativity*, volume 5 of *London Mathematical Society Student Texts.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Ken09] D. Kennefick. Testing relativity from the 1919 eclipse –a question of bias. *Physics Today*, 62(3):37–42, 2009.

[Sch85] B. F. Schutz. *A First Course in General Relativity.* Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[Wei72] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity.* John Wiley & Sons, 1972.

[Wik18] Wikipedia contributors. Tests of general relativity — Wikipedia, the free encyclopedia, 2018. [Online; accessed 17-November-2018].

[Wil01] C. M. Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Rev. Relativ.*, 4:2001–4, 97 pp. (electronic), 2001.