El nacimiento de la relatividad general se suele datar con la publicación de las llamadas *ecuaciones de campo* en 1916 por parte de Einstein. Poco después publicó un artículo [Ein97] describiendo la teoría completa. En mi opinión tal artículo tiene un gran valor didáctico e histórico que yo no he visto mencionado. Piensa que Einstein había estado peleándose durante años con la geometría diferencial riemanniana. Ahora tenía que convencer a sus colegas físicos que era un tema que tenían que aprender si querían entender la gravitación y para ello debía presentarlo de una manera asequible. En sus notas sobre el artículo dice "En la sección B del presente artículo desarrollé todas las herramientas matemáticas –que no puede suponerse que todo físico conoce– e intenté hacerlo de manera tan simple y transparente como fuera posible, de forma que no se requiera un especial estudio de la literatura matemática para entender el presente trabajo".

Te conviene tener una copia de este artículo. El original está en alemán, si no lo lees en [Ein97] hay una traducción al inglés. Seguramente te sea más cómodo descargar una versión en PDF de `http://www.ffn.ub.es/luisnavarro/nuevo_maletin/Einstein_GRelativity_1916.pdf`.

Hoy en día en cualquier libro de grado están todos los contenidos que explica Einstein en la sección B y a pesar de esta introducción, en esta hoja no vamos a ocuparnos de que Einstein nos enseñe geometría riemanniana sino de por qué tiene algún sentido estudiar la gravitación como algo geométrico. Esto es algo más físico que matemático que está motivado en la sección A de su artículo, la cual apenas tiene fórmulas. En definitiva, esta hoja es distinta al resto porque no habrá nuevos resultados ni definiciones matemáticos, lo que se intenta transmitir es una idea, aunque sea vaga, de que el "diccionario" entre gravitación y geometría riemanniana guarda cierta coherencia con algunas ideas físicas.

Creo que te ayudará mirar primero algunas cosas de mis apuntes y otras fuentes antes de leer la parte correspondiente del artículo de Einstein. Tanto en ellas como en el artículo seguramente no entenderás el 100 % como podrías hacer en una demostración matemática. Lo importante es que adquieras una impresión acerca de las motivaciones.

1) Lee [Cha01, pp.105–112]. Si todavía no sabes qué es la derivada covariante, olvida lo del párrafo final. Después lee [Cha12] desde el último párrafo de la página 44 hasta el diccionario geométrico de la página 46, sin incluir la definición de la métrica de Schwarzschild.

2) Busca información, aunque sea a nivel divulgativo, acerca del *principio de equivalencia* y del *ascensor de Einstein*. Después de eso, lee las secciones §3.1 y §3.2 de [Wei72]. Puede que la segunda te cueste. Léela con la profundidad que puedas. Fíjate que está definiendo los símbolos de Christoffel de una manera distinta a la habitual. En la siguiente sección muestra que en realidad son los que conoces.

Ahora ya estás preparado para leer a Einstein, de hecho algunas cosas te parecerán más sencillas que en las lecturas preparatorias. El principal obstáculo es que hay mucha letra y pocas fórmulas a las que agarrarse. Como dice el propio Einstein, no intenta dar un fundamento axiomático sino que transmitir que el camino es el "psicológicamente natural".

3) Lee la sección A de [Ein16]. Incluso si no lo reflejas en tu trabajo, hazte un resumen en pocas líneas de lo que creas que son las ideas principales de cada apartado. Te pongo unas pocas palabras por si te sirven de guía:

- **§1. Observations on the Special Theory of Relativity.** El espacio-tiempo de la relatividad especial es absoluto.
- **§2. The need for an Extension of the Postulate of Relativity.** El espacio-tiempo absoluto debería ser superfluo.
- **§3. The Space-Time Continuum. Requirement of General Co-Variance for the Equations Expressing General Laws of Nature.** Las leyes de la física deberían ser invariantes por cambios de coordenadas arbitrarios.
- **§4. The Relation of the Four Co-ordinates to Measurement in Space and Time.** La gravedad se puede describir con métricas.

Muy posiblemente todo lo que has leído te parecerá bastante vago porque no permite hacer ningún cálculo explícito ni tampoco hay ejemplos. En algunos de mis apuntes para explicar cómo simular la gravedad con métricas he introducido un ejemplo que he llamado "errelandia" porque espacialmente es como la recta real. Lo he ajustado en esta hoja un poco para que todo sea explícito. Consideremos con esta idea la métrica:

$$G = \big(1 + e^{-|x|}\big)^{-1}(dt)^2 - dx^2 \qquad \text{para } x \neq 0.$$

Para x grande G es prácticamente la métrica de Minkowski y así las coordenadas t y x se pueden identificar con el tiempo y el espacio medidos por un observador muy lejano. Las geodésicas $\big(t(\tau), x(\tau)\big)$ parametrizadas por el tiempo propio nos dicen cómo se moverían las partículas materiales.

4) Calcula las ecuaciones diferenciales que definen las geodésicas y muestra que para cada geodésica existe una constante L tal que

$$\ddot{x} + 2L^2 e^{-|x|}\operatorname{sgn}(x) = 0 \tag{1}$$

con $\operatorname{sgn}(x)$ el signo de x.

Nota que (1) implica que bajo las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$, esto es, partiendo del reposo, se tiene una aceleración inicial $\ddot{x}(0)$ que es negativa si $x_0 > 0$ y positiva si $x_0 < 0$. Es decir, si soltamos una partícula se dirigirá hacia el origen. Los habitantes de errelandia pensarán que en el origen hay un sol que los atrae, no sabrán distinguir la métrica de la gravitación.

5) Resuelve la ecuación diferencial (1) bajo $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$. Indicación: Busca soluciones de la forma $x(\tau) = A + B \log \cos(C\tau)$.

6) Usando la definición de tiempo propio, muestra que $L = \frac{1}{2}\big(1 + e^{-|x_0|}\big)^{-1/2}$ y calcula cuanto tiempo propio tarda en llegar al sol (al origen) una partícula que parte del reposo desde $x_0 = 2\log 2$.

7) Comprueba que si la partícula está lejos del origen, τ debe ser grande (debe pasar mucho tiempo propio) para que se mueva significativamente. Los errelandeses dirían que la gravedad decrece con la distancia.

8) Según un observador lejano que usa las coordenadas (t, x), ¿cuál es la fórmula para la velocidad de la luz en función de la posición x?

Una vez que nos creemos que la gravedad se representa por una métrica el objetivo final será hallar dicha métrica. Hay un paso intermedio y es saber qué aspecto debería tener para ser coherente con la mecánica newtoniana en primera aproximación. Esto no es difícil pero quizá te parezca demasiado físico. Lo escribí en [Cha01, pp.112–115] pero no estoy muy satisfecho con el resultado. Lo puedes encontrar también por ejemplo en [FN79, §2.7], en [Wei72, §3.4] y en [Sch85, §7.2] (esto último quizá te cueste más entenderlo). Toma el siguiente ejercicio como opcional con el grado de profundidad que prefieras. Al menos dale un vistazo.

9) Lee sobre la relación de la métrica con el potencial newtoniano en alguna de las anteriores referencias u otras que encuentres.

Tarea a entregar. Esta vez te voy a dejar más libertad que otras veces. Con todo lo que has leído para esta hoja, escribe de la manera que quieras una motivación de la filosofía de la relatividad general actuando como un diccionario entre temas de gravitación y de geometría diferencial. Lo único que te pido es que hagas alguna referencia al artículo de Einstein y que incluyas el ejemplo de errelandia que has trabajado en los ejercicios. Dejo a tu elección si mencionar, desarrollar o simplemente omitir la aproximación de g_{00} a través del potencial Newtoniano.

La extensión depende mucho de lo que quieras entrar en detalle por tanto no te digo nada orientativo.

Referencias

[Cha01] F. Chamizo. Seminario 2001: Una odisea en el espacio-tiempo. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/APseminario02.pdf`, 2001.

[Cha12] F. Chamizo. Geometría Diferencial (teatro de variedades para estudiantes de máster) 2011–2012. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/APcompl_geom11.pdf`, 2012.

[Ein16] A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354:769–822, 1916.

[Ein97] A. Einstein. *The collected papers of Albert Einstein. Vol. 6.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. The Berlin years: writings, 1914–1917, English translation of selected texts by A. Engel in consultation with E. Schucking, With a preface by Engel and Schucking.

[FN79] J. Foster and J. D. Nightingale. *A short course in general relativity.* Longman, London, 1979. Longman Mathematical Texts.

[Sch85] B. F. Schutz. *A First Course in General Relativity.* Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[Wei72] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity.* John Wiley & Sons, 1972.