Un hecho básico de la relatividad general que hace que sea una teoría bastante matemática es que las trayectorias de las partículas son las geodésicas en la variedad que modela el espacio-tiempo. En esta hoja vamos a comenzar a acercarnos a la geometría riemanniana, que es la geometría diferencial suponiendo que uno tiene una manera de medir que permite definir las geodésicas. En cierta manera se acerca a la geometría de tercero en cuanto al formalismo pero a la parte de superficies del curso de segundo en cuanto a los objetivos.

Primero debes recordar algunos conceptos básicos de geometría. Dependiendo de lo que sepas previo lo que te propongo aprender en esta hoja puede resultarte bastante duro. Por favor, si es el caso, no te importe detenerte el tiempo que necesites con ella porque es importante.

Para no perder tiempo, creo que es conveniente que vayas recordando o aprendiendo algunas cosas de geometría diferencial sin perderte en aspectos técnicos y con algunas referencias físicas. Si no lo has hecho ya, haz lo siguiente:

1) Lee [Cha15a] para tener una idea aproximada acerca de qué es una variedad, un vector tangente y una 1-forma en geometría diferencial y compara estas ideas intuitivas con las definiciones rigurosas que hayas estudiado.

Para lo segundo, si no tienes buenos apuntes, en [Cha09, §1.2] hay un repaso rápido y también te servirá cualquier texto de geometría diferencial, por ejemplo [dC92] (que usa parametrizaciones en lugar de cartas) [Wal04] o [O'N83] . Estos también te servirán como referencia de geometría en temas que veremos después. En [Fra12] y [Sch85] hay un tratamiento más físico.

Un problema con la geometría diferencial es que tiene mucho formalismo y algunos textos se extasían con él y las ideas subyacentes quedan ocultas. Por ello quiero mencionar [Gon05] que es un libro original que da mucha intuición y te puede resultar muy útil. En una sección final, §4.17, da en cinco páginas algunas ideas muy buenas acerca de la relatividad general que más adelante te podrán ser útiles. También tiene muchas ideas [Spi79] con especiales referencias históricas a los trabajos de Gauss y Riemann.

No me canso de insistir en que si no tienes muy fresca la geometría diferencial, su formalismo te puede resultar extrañísimo. Mira todas las referencias que necesites y consúltame lo que no te aclaren.

Lo siguiente que debes hacer es aprender qué es una *métrica*. Esencialmente es un producto escalar para vectores tangentes, lo que pasa es que habitualmente (en gran medida por la relatividad) no se pide que sea definido positivo, sino solo que sea no singular (que no haya ningún vector ortogonal a todos los vectores). Una *variedad riemanniana* es una variedad con una métrica. En [Cha09] y en algunos libros se distingue entre riemanniana y semiriemanniana, dependiendo de si la métrica es positiva o no, pero nosotros, siguiendo a otros autores, llamaremos a todas riemannianas.

Las métricas son casos particulares de *tensores*, un tema que tiene fama de abstruso por utilizar una notación taquigráfica. Aparecen en el formalismo de la relatividad general, por tanto es necesario que aprendas cuanto antes algo de ellos.

2) Lee [Cha09, §1.1] y para ver que lo has entendido, mira si eres capaz de resolver todas las preguntas breves del primer ejercicio de la sección. Si dudas en alguna, pregúntame. Una prueba de que te has con la notación y con el convenio de sumación es que comprendas perfectamente que $D = ABC$ en componentes es $d^i_j = a^i_k b^k_l c^l_j$.

Realmente nosotros estamos interesados en tensores sobre variedades. No hay diferencias mayores en la definición pensando en campos en vez de en vectores, es decir, se permite que los vectores varíen de punto en punto. De algún modo, los cambios de bases pasan a ser aplicaciones de la regla de la cadena.

3) Lee [Cha09, §1.3]. Si quieres sáltate la parte final que habla de transformaciones de Lorentz. Una vez hecho esto, lee las páginas 55 y 56 de [Cha09].

Los tres siguientes ejercicios no son para hacerte sufrir con cálculos sino para que practiques con las métricas. Trata de hacerlos por tu cuenta aunque estén en muchos sitios.

4) Calcula la métrica usual de $\mathbb{R}^2$ en coordenadas polares y la métrica de Lorents de $\mathbb{R}^2$, $dt^2 - dx^2$ en las coordenadas hiperbólicas (r, u) dadas por $t = r \cosh u$, $x = r \operatorname{senh} u$.

5) Calcula la métrica inducida por la usual en la esfera unidad S^2, usando la carta (θ, φ) de las coordenadas esféricas.

6) El *semiplano de Poincaré* es el semiplano superior $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > 0\big\}$ con la métrica de Poincaré $y^{-2}dx^2 + y^{-2}dy^2$ que hace que los vectores midan más abajo que arriba. Comprueba que la transformación $f : (x,y) \longmapsto \big(-x/(x^2+y^2), y/(x^2+y^2)\big)$ es una *isometría*, esto es, que preserva la métrica. Sugiero que uses alguna abreviatura para hacer los cálculos sin escribir mucho, por ejemplo $L = x^2 + y^2$, $M = x^2 - y^2$.

Una vez que ya vas haciéndote con el formalismo, vamos a pasar a las *geodésicas* que, como te he avanzado, dan las trayectorias de las partículas en la relatividad general y por tanto es un tema central. Seguro que sabes que las geodésicas minimizan la distancia. Aunque eso es cierto bajo ciertas hipótesis, no es una buena manera de definirlas. Es mejor introducirlas como minimizantes de la "energía". Esta es la idea crucial que debes sacar de esta hoja. El resto es lo necesario para tener un contexto donde hablar de ello.

7) Lee [Cha09, §3.1] ya completo (lo que viene tras la Proposición 3.1.4 no lo usaremos), intentando entender bien las ideas. Dependiendo de lo que te guste la física, te puede resultar interesante mirar también [Cha15b], que cae dentro de la mecánica clásica.

Una tontería de procedimiento es que para no estar usando muchas notaciones creo que me voy a olvidar en lo sucesivo de la abreviatura $f_{,k}$ (p.60) y usar solo $\partial_k f$ que es más intuitiva.

Si quieres haz tú lo mismo en tu trabajo.

Las geodésicas rara vez se pueden hallar explícitamente, todo lo que solemos poder hacer es calcular sus ecuaciones diferenciales y aproximar las soluciones o estimarlas numéricamente. A este respecto, es sorprendente que Einstein consiguiera con argumentos físicos aproximar algunas geodésicas (que no reflejaban trayectorias newtonianas) sin tener claro inicialmente ni siquiera qué métrica exacta tenía que usar. Quizá vayamos sobre ello más tarde. Lo importante ahora es que sepamos hacer los cálculos matemáticos exactos.

8) Sigue el ejemplo de la página 62 de [Cha09] para hallar las ecuaciones diferenciales que definen las geodésicas en S^2 y sus símbolos de Christoffel.

9) Calcula las ecuaciones diferenciales que definen las geodésicas para el semiplano de Poincaré que apareció en un ejercicio anterior.

Termino con un avance en términos matemáticos de lo que empezaremos a explotar en las hojas sucesivas: La relatividad general es una teoría de gravitación que propugna que la fuerza de la gravedad no existe como fuerza independiente del espacio-tiempo sino que es una manifestación de que el espacio-tiempo tiene una métrica extraña que hace que los objetos sigan geodésicas curvadas. Es decir, los planetas se mueven en trayectorias elípticas porque esas corresponden a las geodésicas de cierta métrica que hay en el Sistema Solar. Bajo esta filosofía, el Sol no atrae a los planetas, sino que deforma la métrica usual de Minkowski de manera que las geodésicas dejan de ser rectas. Todo esto parece absurdo y complicar las cosas pero después de 100 años, no hay una teoría alternativa que haya podido competir con las relatividad general para explicar fenómenos gravitatorios finos.

Tarea a entregar. Lo que debes hacer primero es un miniresumen de geometría diferencial que mencione los conceptos de variedad, vector tangente, 1-forma, tensor y métrica. Puedes poner definiciones rigurosas o ideas intuitivas, como prefieras, lo que sí es obligatorio es que des referencias. Intenta ser breve en esta parte, por lo demás te dejo bastante libertad.

Una vez hecho esto, motiva el concepto de geodésica, da su definición lagrangiana, como en [Cha09, §3.1], y escribe los resultados y definiciones que te parezcan más significativos de los que has leído allí o en otros sitios. Dejo a tu elección incluir alguna prueba o esbozo de ella. Pon como ejemplos el cálculo de las ecuaciones diferenciales de las geodésicas para S^2 y para el semiplano de Poincaré que has hecho en los ejercicios.

Te sugiero alrededor de cinco o seis páginas pero no lo tomes de manera muy estricta.

Referencias

[Cha09] F. Chamizo. Geometría IV (tensores, formas, curvatura, relatividad y todo eso). http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/apgeomiv08.pdf, 2009.

[Cha15a] F. Chamizo. Bases de geometría diferencial. http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/mgeom1415/fisgeo1.pdf, 2015.

[Cha15b] F. Chamizo. Mecánica analítica I. http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/mgeom1415/fisgeo2.pdf, 2015.

[dC92] M. P. do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.

[Fra12] T. Frankel. *The geometry of physics*. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 2012. An introduction.

[Gon05] J. Gonzalo. *Variedades y Geometría: un curso breve*, volume 64 of *Documentos de Trabajo*. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 2005.

[O'N83] B. O'Neill. *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1983. With applications to relativity.

[Sch85] B. F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[Spi79] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II*. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

[Wal04] G. Walschap. *Metric structures in differential geometry*, volume 224 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2004.