Primero te recuerdo algunas cosas generales:

Esta hoja y las sucesivas las iré poniendo en `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/tfg.html` donde también hay una lista de la propuesta inicial de los contenidos. Imitan el formato del trabajo que se indica en la guía docente en cuanto a márgenes y tamaño de letra. La fuente LaTeX, los ficheros `CG18hoja*.tex`, te serán muy útiles como plantilla y para poder copiar fórmulas y referencias, sobre todo cuando al principio tengas menos soltura con LaTeX. Mi recomendación es que con ayuda de alguien lo instales cuanto antes en tu ordenador y pruebes a compilar esta hoja. Yo uso BibTeX para las referencias, que las toma de un fichero externo, pero te mandaré los ficheros para que lo puedas compilar sin ello (a no ser que sepas usarlo). Si alguna vez ves que faltan las referencias al compilar, házmelo saber porque será que se me ha olvidado cambiarlo.

Las hojas incluyen explicaciones y referencias para que aprendas algunas cosas y algunos ejercicios. Al final te pondré lo que me tienes que enviar. En general será una primera redacción en LaTeX de un apartado para el trabajo. Yo lo corregiré y te lo mandaré de vuelta para que hagas los cambios indicados. Por supuesto que después se pueden hacer correcciones de conjunto para que todo cuadre mejor pero la idea es que, en la medida de lo posible, estos trozos conformen el trabajo. El límite es de 30 páginas, según la guía docente, lo que hace una media de unas 4 páginas por cada apartado, aunque unos serán más largos que otros.

Pasando a generalidades sobre tu trabajo, en tres de mis apuntes aparecen temas de tu TFG: [Cha01], [Cha09], [Cha12]. Te mandaré leer algunas cosas de ellos porque me son familiares. Los primeros los escribí hace mucho (en TeX en lugar de LaTeX) y seguramente las explicaciones son mejorables.

Comenzamos por las ecuaciones de Maxwell porque motivaron la relatividad especial. Así que la primera tarea es:

1) Lee [Cha16] si no lo has hecho ya, y si tienes interés mira también lo que quieras de [FLS64] que es la mejor referencia que conozco sobre electromagnetismo a nivel de carrera.

Simplemente para jugar con las ecuaciones, te sugiero que hagas el siguiente cálculo sencillo:

2) Para campos electromagnéticos de la forma $\vec{E} = \big(0, E(x,t), 0\big)$ y $\vec{B} = \big(0, 0, B(x,t)\big)$, las ecuaciones de Maxwell se reducen a

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}. \tag{1}$$

Si un observador O' va a velocidad v por delante de nosotros, parece claro que su medición del espacio será $x' = x - vt$ y que por supuesto medirá los mismos tiempos, $t' = t$. Estas son las *transformaciones de Galileo*. Pues bien, aunque esto suene evidente entra en conflicto con las ecuaciones de Maxwell y eso es lo que motivó a Einstein a pensar que las transformaciones de Galileo eran solo aproximadas. Esto se ha comprobado experimentalmente. El famoso artículo de Einstein sobre la relatividad especial [Ein05] se titula “Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento” lo que da una clara idea de su motivación.

3) Lee [Cha01, pp.10–11] para ver un problema con las ecuaciones de Maxwell. Otra forma matemática de proceder es que, como has leído, las ecuaciones de Maxwell implican la ecuación de ondas. Trata de convencerte a ti mismo, si quieres en el caso unidimensional $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, de que la ecuación de ondas no es invariante por las transformaciones de Galileo.

Si uno quiere preservar las ecuaciones de Maxwell a toda costa, hay que cambiar las transformaciones de Galileo por otras, las llamadas *transformaciones de Lorentz*. Como indica su nombre, no las introdujo Einstein pero fue él quien creyó que realmente tenían significado físico real.

Hay maneras de llegar a las transformaciones de Lorentz que un físico diría que son demostraciones matemáticas (aunque posiblemente ni tú ni yo le daríamos la razón). Veamos una de ellas pasando por las ecuaciones de Maxwell y no mucha más física. Sigo vagamente una parte de [Dun08] (que supongo que es de los físicos a los que no daríamos la razón).

La ley de inercia (si no hay fuerzas los movimientos son rectilíneos uniformes) sugiere que las transformaciones buscadas son lineales:

$$x' = Ax + Bt, \qquad t' = Cx + Dt.$$

Aunque todo lo que no sea $C = 0$ y $D = 1$ choque con nuestra intuición, seguimos adelante. Si O' va a velocidad v, al sustituir $x = vt$ debe obtenerse $x' = 0$. Por otro lado, para O' nuestra velocidad es $-v$ por tanto $x' = -vt'$ debe corresponder a $x = 0$. Con esto se deduce

$$x' = Ax - Avt, \qquad t' = Cx + At.$$

Si O' marcase dos puntos x_1' y x_2' entonces nosotros mediríamos en un instante fijado una separación de $x_2 - x_1$ donde él ve $A(x_2 - x_1)$. Es de suponer que esto es recíproco, el efecto es relativo. Por tanto imponemos que al despejar x y t en función de x' y t' el coeficiente de x' sea A. Haciendo el cálculo, las transformaciones buscadas quedan caracterizadas salvo determinar el parámetro A, al que siguiendo una tradición en física renombraremos como γ. El resultado es:

$$x' = \gamma x - \gamma vt, \qquad t' = \frac{1-\gamma^2}{\gamma v}x + \gamma t.$$

Por la regla de la cadena, haciendo este cambio en (1) se obtiene:

$$\gamma\frac{\partial E}{\partial x'}+\frac{1-\gamma^2}{\gamma v}\frac{\partial E}{\partial t'}=\frac{\gamma v}{c}\frac{\partial B}{\partial x'}-\frac{\gamma}{c}\frac{\partial B}{\partial t'} \qquad \text{y} \qquad \gamma\frac{\partial B}{\partial x'}+\frac{1-\gamma^2}{\gamma v}\frac{\partial B}{\partial t'}=\frac{\gamma v}{c}\frac{\partial E}{\partial x'}-\frac{\gamma}{c}\frac{\partial E}{\partial t'}.$$

Agrupando los términos con $\partial x'$ y con $\partial t'$, se sigue

$$\frac{\partial}{\partial x'}\Big(\gamma E-\frac{\gamma v}{c}B\Big)=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\Big(\gamma B+\frac{1-\gamma^2}{\gamma v}cE\Big), \qquad \frac{\partial}{\partial x'}\Big(\gamma B-\frac{\gamma v}{c}E\Big)=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\Big(\gamma E+\frac{1-\gamma^2}{\gamma v}cB\Big)$$

Si queremos que (1) se cumpla también para el observador O' parece que deberíamos tener $E'=\gamma E-\gamma vc^{-1}B$ y $B'=\gamma B-\gamma vc^{-1}E$, lo cual es coherente con $\gamma\to 1$ cuando $v\to 0$ para que la transformación tienda a la identidad, pero los segundo miembros solo cuadran con los primeros si $-\gamma vc^{-1}=(1-\gamma^2)c\gamma^{-1}v^{-1}$, es decir, si $\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ (el signo $+$ es por lo de $v\to 0$). Con esto hemos llegado a las transformaciones de Lorentz:

$$x'=\gamma(x-vt), \qquad t'=\gamma(t-vx/c^2) \qquad \text{con} \quad \gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2}.$$

4) Aunque lo anterior te resulte duro de entender, trata al menos de completar las cuentas que no he escrito. Puedes mirar [Dun08] pero allí hay menos explicaciones. Si quieres saber cómo procedió originalmente Einstein, está explicado en [Cha01, §1.2] y puedes encontrar el artículo original traducido al inglés en [LEMWed] y en la red he visto traducciones al español.

Esencialmente se llama relatividad especial a la física que resulta de reemplazar las transformaciones de Galileo por las de Lorentz. Las conclusiones a las que llevan las transformaciones de Lorentz son tan poco intuitivas que resultan difíciles de creer. El “truco” es que solo se hacen evidentes para velocidades comparables a la de la luz y eso es difícil de reproducir en nuestra experiencia habitual e incluso en un laboratorio. Es importante que conozcan las conclusiones más famosas.

5) Lee estas conclusiones en [Cha01, pp.10–11]. Una buena referencia es [Sch85].

Minkowski, que había sido profesor de Einstein, dio una interpretación geométrica de las transformaciones de Lorentz. Inicialmente esto le pareció a Einstein una tontería pero a la larga resultó importante en el desarrollo de la relatividad general. En realidad fue Minkowski y no Einstein quien introdujo el concepto de espacio-tiempo [LEMWed].

Te cuento la idea sobre todo a través de conceptos que te sonarán de primero. Los giros en $\mathbb{R}^2$ son los movimientos directos, es decir, las transformaciones lineales de determinante positivo que preservan la forma bilineal dada por el producto escalar usual o equivalentemente la forma cuadrática x^2+y^2 o si uno se pone muy pedante (cuarto de grado), la métrica dx^2+dy^2 de $\mathbb{R}^2$ como variedad riemanniana. Pensemos en las transformaciones de Lorentz en unidades relativistas. Esto significa que nos cansamos de escribir c y decretamos que $c = 1$. En ese caso tienen una matriz simétrica sencilla:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad \Lambda = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix}.$$

Si haces los cálculos verás que cumple

$$\Lambda^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente, $(x')^2 - (t')^2 = x^2 - t^2$ o preserva $dx^2 - dt^2$. Esto físicamente está relacionado con la constancia de la velocidad de la luz. Más matemático es decir que escribiendo formalmente $t = iy$ (algo así como decir que el tiempo es espacio imaginario) entonces las transformaciones de Lorentz son los giros de toda la vida. Eso simplifica algunos cálculos pero no entraremos en ello. Lo que quiero que tengas en mente es que si decretamos que en física usamos una forma de medir rara dada por la (pseudo)-*métrica de Minkowski* $dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ (se toma a veces con el signo contrario pero la prefiero así) entonces las transformaciones de Lorentz que dan las relaciones más generales entre observadores inerciales son las que dejan invariante esta métrica. Constituyen lo que se llama el *grupo de Poincaré*. Se suele escribir la coordenada t en primer lugar Con esta manera de medir, por ejemplo la distancia al cuadrado entre $(0, 7, 3, 1)$ y $(2, 7, 4, 1)$ es $2^2 - 0^2 - 1^2 - 0^2 = 3$. La situación absurda de una distancia al cuadrado negativa entre $(0, 7, 3, 1)$ y $(2, 7, 6, 1)$ se interpreta físicamente como que esos puntos no están conectados de ninguna manera pues ni yendo a la velocidad de la luz $c = 1$ podríamos llegar de $(7, 3, 1)$ a $(7, 6, 1)$ en un tiempo $t = 2$.

Tarea a entregar. Haz una selección de lo que has aprendido con tus lecturas de esta hoja. Los cuatro puntos principales son enunciar las ecuaciones, explicar su relación con las transformaciones de Lorentz, mencionar algunas de las consecuencias de estas últimas y mencionar su interpretación geométrica como los movimientos que dejan invariante cierta extraña forma de medir.

Te sugiero entre tres y seis páginas. Soy consciente de que escribir seis páginas nada más empezar a aprender LaTeX es muy duro. Tómate el tiempo que necesites, mientras sea razonable, y pídeme ayuda para cualquier duda de matemáticas o de LaTeX. Incluye cualquier referencia de las que pongo u otra que hayas encontrado tú a la que hayas dado un mínimo vistazo. Hay mucha literatura de alta divulgación que explica bastante de las transformaciones de Lorentz aunque no se meta en las ecuaciones de Maxwell.

Referencias

[Cha01] F. Chamizo. Seminario 2001: Una odisea en el espacio-tiempo. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/APseminario02.pdf`, 2001.

[Cha09] F. Chamizo. Geometría IV (tensores, formas, curvatura, relatividad y todo eso). `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/apgeomiv08.pdf`, 2009.

[Cha12] F. Chamizo. Geometría Diferencial (teatro de variedades para estudiantes de máster) 2011–2012. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/APcompl_geom11.pdf`, 2012.

[Cha16] F. Chamizo. Las ecuaciones de maxwell en plan fácil. `http://www.uam.es/fernando.chamizo/physics/physics.html`, 2016.

[Dun08] D. J. Dunstan. Derivation of special relativity from Maxwell and Newton. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 366(1871):1861–1865, 2008.

[Ein05] A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 17:891–921, 1905.

[FLS64] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 2: Mainly electromagnetism and matter*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1964.

[LEMWed] H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, and H. Weyl. *The principle of relativity*. A collection of original memoirs on the special and general theory of relativity. Dover Publications Inc., New York, N. Y., undated. With notes by A. Sommerfeld, Translated by W. Perrett and G. B. Jeffery.

[Sch85] B. F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.