

En esta hoja vamos a estudiar dos aplicaciones de las sumas oscilatorias que tienen interés en teoría de números. En la primera no veremos el sentido completo de la conexión con la aritmética porque te tienes que creer que la suma que estudiaremos tiene que ver con la distribución de los primos. Esta relación con los primos excede con mucho el ámbito de tu trabajo. La segunda es mucho más tangible, pues tiene una interpretación geométrica. Aun así hay dos desigualdades de análisis que vamos a dar por supuestas porque no he sabido cómo obtenerlas brevemente. En ambos casos te doy referencias que puedes mencionar en tu trabajo o consultar si quieres poner algo más al respecto.

Aplicación 1. La hipótesis de Lindelöf. Consideramos acotaciones del tipo

$$S(t) = O(t^\delta) \quad \text{para} \quad S(t) = \sum_{1 \leq n < t} \frac{1}{n^{1/2+it}} \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 2}.$$

Recuerda que algo parecido, pero con t pequeño, apareció en la hoja anterior. La llamada *hipótesis de Lindelöf* afirma que esta acotación se cumple para cualquier $\delta > 0$. Lo mejor que se conoce a día de hoy [1] es que es válida para $\delta > 13/84$ y nosotros vamos a probar aquí que lo es para $\delta > 1/6$. A pesar de que $13/84$ reduce en poco más de una centésima el $1/6$ que obtenemos, requiere muchísimo esfuerzo y técnicas que están en la vanguardia del análisis. Entender [1] está al alcance solo de una minoría de expertos.

Te explico qué tiene que ver con teoría de números. Refleja en tu trabajo, con tus palabras, lo que quieras de lo que escribo. Seguramente hayas oído hablar de la función ζ de Riemann, una función de variable compleja que sirve para estudiar la distribución de los primos, y de la *hipótesis de Riemann*, para algunos el problema sin resolver más importante de las matemáticas, que equivale al menor error posible en la aproximación de los primos. Pues bien, se puede probar que $\zeta(1/2 + it)$ se aproxima bien por $S(t)$. De hecho la prueba tiene que ver con tu trabajo [3, Th. 1.8]. He decidido no incluirla por cuestiones de espacio. Utilizando esto y técnicas avanzadas de variable compleja, se sigue que si la hipótesis de Lindelöf fuera falsa, la de Riemann también lo sería [5, §14.2] y, entonces, los primos tendrían un comportamiento más caótico del esperado. Por otro lado, si la hipótesis de Lindelöf es cierta, los primos consecutivos no podrían estar muy espaciados, concretamente $p_{n+1} - p_n = O(p_n^\sigma)$ para cualquier $\sigma > 1/2$, donde p_n indica el primo n -ésimo.

Para obtener el $1/6$, el esquema consiste en preparar $S(t)$ hasta que podamos aplicar los teoremas de la hoja 3 de forma adecuada. El primer paso es una “descomposición en intervalos diádicos”. Quizá te haya aparecido esta técnica elemental en algún curso de análisis. En nuestro caso la motivación es obtener sumas oscilatorias sobre intervalos con extremos comparables para que las derivadas en los resultados de la hoja 3 no presenten muchas variaciones.

1) Explica la igualdad $[1, t) \cap \mathbb{Z} = \bigcup_{0 \leq j \leq \log_2 t} [2^{-j-1}t, 2^{-j}t) \cap \mathbb{Z}$, con $\log_2$ el logaritmo en base 2, y por qué se deduce de ello que $\sum_{n=N}^M n^{-1/2-it} = O(t^{1/6})$ para $M < \min(2N, t)$ implica $S(t) = O(t^\delta)$ para todo $\delta > 1/6$.

2) Sea $\{a_n\}_{n=N}^M$ una lista de números complejos y $S_n = \sum_{k=N}^n a_k$. Demuestra que

$$\left| \sum_{n=N}^M \frac{a_n}{\sqrt{n}} \right| = \left| \sum_{n=N}^{M-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) S_n + \frac{1}{\sqrt{M}} S_M \right| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \max_{N \leq n \leq M} |S_n|.$$

3) De lo anterior concluye que $S(t) = O(t^\delta)$ para $\delta > 1/6$ se deduce si demostramos

$$N^{-1/2} \sum_{n=N}^M e\left(\frac{t \log n}{2\pi}\right) = O(t^{1/6}) \quad \text{para } N, M \in \mathbb{Z}^+, M < \min(2N, t).$$

4) Aplica el Teorema 2 de la hoja 3 si $N \geq t^{2/3}$ y el Teorema 3 si $N \leq t^{2/3}$ para deducir la acotación del ejercicio anterior.

Aplicación 2. El problema del círculo. Este es un problema clásico cuyas raíces se remontan a Gauss. El número de representaciones como suma de dos enteros al cuadrado es una función muy caótica. Por ejemplo, 32044 no tiene representaciones mientras que 32045 tiene 64 (como $2^2 + 179^2$ o $(-178)^2 + 19^2$). Estudiar el promedio de esta función lleva a aproximar el número de puntos de coordenadas enteras en el círculo centrado de radio R porque cada representación de $N \leq R^2$ es una solución entera de $x^2 + y^2 = N$, un punto en una circunferencia de radio a lo más R . Claramente, este número $C(R)$ debe ser parecido al área del círculo para R grande. Lo que vamos a probar es

$$(1) \quad C(R) = \pi R^2 + O(R^{2/3}) \quad \text{donde } C(R) = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m^2 + n^2 \leq R^2\}.$$

El llamado *problema del círculo* pregunta hasta dónde se puede reducir el término de error. Concretamente, la conjetura es que $O(R^{2/3})$ debiera poder sustituirse por $O(R^\delta)$ para cualquier $\delta > 1/2$. El mejor resultado conocido es $O(R^{131/208})$ multiplicado por una potencia de logaritmo [2]. De nuevo, aunque numéricamente 131/208 y 2/3 se diferencien en menos de 4 centésimas, hay un abismo entre las técnicas que usaremos nosotros y las que se necesitan para obtener la mejora.

En nuestra prueba de (1) nos limitaremos a radios de la forma

$$R = N\sqrt{2} \quad \text{con } N \in \mathbb{Z}^+.$$

Es solo para simplificar la exposición. En realidad el resto de los R se tratan casi igual cambiando las N en las fórmulas posteriores por ciertas partes enteras que afean y alargan los argumentos. Si tienes interés y tiempo, te puedo contar los cambios necesarios para cubrir todos los R para que los cites en un apéndice, aunque no me parece tan recomendable, porque es lo mismo salvo que algo más feo.

Ya he anunciado al principio que hay unas desigualdades de análisis que no veremos en tu trabajo. Te las explico antes de comenzar. Dado $M \in \mathbb{Z}_{>1}$ se definen los *polinomios trigonométricos de Beurling* B_M^+ y B_M^- como

$$B_M^\pm(x) = \pm \frac{1}{2} \pm \sum_{k=1}^{M-1} f_1(k/M) \cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{M-1} f_2(k/M) \sin(2\pi kx)$$

con $f_1(x) = 1 - x$ y $f_2(x) = (x - 1) \cot(\pi x) - \pi^{-1}$. La propiedad que emplearemos sin prueba es

$$B_M^-(x) \leq Mx - \frac{M}{2} \leq B_M^+(x) \quad \text{para } x \in [0, 1).$$

La demostración está en [4] (aparece en una forma más completa como *Lema de Vaaler*, por si lo quieres citar así). No utiliza técnicas complicadas, pero ocupa demasiado. Es posible obtener el resultado sin esta desigualdad, pero lo que he pensado al respecto también alargaba la hoja.

En realidad, la forma específica de $B_M^\pm$ es poco importante, aparte de la desigualdad anterior, todo lo que necesitamos de ellos está en el siguiente ejercicio:

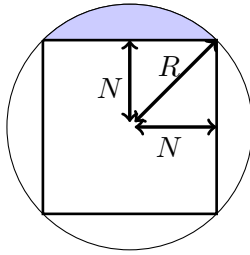
5) Las fórmulas de Euler $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ y $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$, permiten escribir

$$B_M^\pm(x) = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} a_k^\pm e(kx) \quad \text{con } a_0^\pm = \pm \frac{1}{2}.$$

Prueba que existe una constante C (que no hace falta que halles) tal que $|k a_k^\pm| \leq CM$. Indicación: Basta ver que $x_k f_1(x_k)$ y $x_k f_2(x_k)$ están uniformemente acotadas para $x_k = k/M$ con $0 \neq |k| < M$.

Comencemos con la prueba de (1).

6) Fijándote en la figura, y empleando la notación $\psi(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$ con $\lfloor x \rfloor$ la parte entera, que es común en teoría de números, obtén las siguientes fórmulas para $C(R)$. Debieran resultarte muy sencillas, de hecho la primera es trivial notando que en cada lado del cuadrado hay $2N + 1$ puntos y que el sumatorio da el número de puntos en la parte sombreada (sin incluir la base).



$$C(R) = 4 \sum_{n=-N}^N (\lfloor \sqrt{R^2 - n^2} \rfloor - N) + (2N + 1)^2$$

$$C(R) = 4S_1 - 4S_2 + 4N^2 - 1$$

$$\text{donde } S_1 = \sum_{n=-N}^N (\sqrt{R^2 - n^2} - N)$$

$$S_2 = \sum_{n=-N}^N \psi(\sqrt{R^2 - n^2}).$$

Por cierto, si quieres reproducir la figura anterior copiando lo que aparece en la fuente L^AT_EX de este documento, seguramente tengas que incluir las líneas `\usepackage{tikz}` y `\usetikzlibrary{babel,angles,quotes}` que aparecen en la cabecera.

Sin restringir los radios a $R = N\sqrt{2}$ las fórmulas anteriores quedarían más feas. Las sumas serían sobre los enteros en $[-R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2}]$ y al contar los puntos en el cuadrado aparecerían partes enteras.

Para obtener (1) demostraremos $S_1 = \frac{\pi R^2}{4} - N^2 + O(1)$ y $S_2 = O(R^{2/3})$.

7) Aplicando el primer ejercicio de la hoja 3 con $g(x) = \sqrt{R^2 - x^2} - N$ y el *segundo teorema del valor medio para integrales*¹, justifica

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-N}^N (g(x) + \psi(x)g'(x)) dx = 2 \int_{-N}^0 (g(x) + g'(x)\psi(x)) dx \\ &= 2 \int_{-N}^0 g(x) dx + O(1) = \frac{\pi R^2}{4} - N^2 + O(1). \end{aligned}$$

Indicación: La última igualdad se sigue de $\int_{-N}^0 \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{\pi R^2}{8} + \frac{R^2}{4}$. Aunque esta integral sale fácil con $x = R \sin t$, no la detalles en tu trabajo. Basta con que digas que da eso.

Ahora vamos con S_2 . Aquí emplearemos la desigualdad de los $B_M^\pm$. La manera larga de proceder sin apelar a ella es utilizar el desarrollo de Fourier de ψ para obtener directamente sumas oscilatorias. Lo malo es que conduce a resolver ciertos problemas de convergencia de la serie infinita que complicarían la hoja, por ello me he decidido a que emplees los $B_M^\pm$ que son sumas finitas.

8) Explica por qué $B_M^-(x) \leq M\psi(x) \leq B_M^+(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (esto debiera resultarte obvio a partir de la desigualdad sin prueba) y deduce de ello y de la acotación para $|k| a_k^\pm$ que

$$|S_2| \leq \frac{2N+1}{2M} + 2C \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{k} \left| \sum_{n=-N}^N e(k\sqrt{R^2 - n^2}) \right|.$$

Recuerda que $M \in \mathbb{Z}_{>1}$ es arbitrario. Elijámoslo comparable a $R^{1/3}$, por ejemplo, $M = \lfloor R^{1/3} \rfloor$. Entonces $(2N+1)/(2M) = O(R^{2/3})$ y todo lo que hay que comprobar para obtener (1) es que la doble suma está dentro de ese orden de magnitud (¿lo ves claro?).

¹Por si no lo conoces, afirma que si $f \geq 0$ es decreciente en $[a, b]$ entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(t)h(t) dt = f(a) \int_a^c h(t) dt$. Aquí h es cualquier función integrable [6].

9) Usando el Teorema 2 de la hoja 3, demuestra que

$$\sum_{n=-N}^N e(k\sqrt{R^2 - n^2}) = O(R^{1/2}k^{1/2}).$$

10) Concluye (1) de los ejercicios anteriores.

Tarea a entregar. Combina las soluciones de los ejercicios anteriores en un documento que dé lugar al quinto y último capítulo de tu TFG bajo el título *Dos aplicaciones relacionadas con la aritmética* o la variante que prefieras. Mi recomendación es que no lo ajustes a 6 páginas. Sugiero que no detalles mucho los cálculos porque si no el resultado podría invitar poco a su lectura.

Referencias

- [1] J. Bourgain. Decoupling, exponential sums and the Riemann zeta function. *J. Amer. Math. Soc.*, 30(1):205–224, 2017.
- [2] M. N. Huxley. Exponential sums and lattice points. III. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 87(3):591–609, 2003.
- [3] A. Ivić. *The Riemann zeta-function*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2003. Theory and applications, Reprint of the 1985 original [Wiley, New York].
- [4] H. L. Montgomery. *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, volume 84 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [5] E. C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1986. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.
- [6] Wikipedia contributors. Mean value theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mean_value_theorem&oldid=1280219541, 2025. [Online; accessed 17-March-2025].