

En esta hoja vamos a estudiar curiosos aspectos geométricos de algunas sumas oscilatorias y es importante que incluyas algunas figuras. Si no sabes cómo hacerlo da un vistazo a la sección 9.3 de mi curso de L^AT_EX¹ donde hay una explicación rápida. Si quieres incluir código (programas), aunque vayan a un apéndice, puedes usar la “Plantilla de figuras y código” que tengo en <https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/enlaces.html>.

Al preparar la hoja he estado dudando bastante si profundizar algo más en la teoría para dar explicaciones precisas de las figuras o ser menos preciso utilizando en su mayoría la teoría ya vista. Al final me he decidido por lo segundo para no alargar mucho la hoja y bajar el nivel de dificultad respecto de las anteriores. La desventaja es que algunas cosas te pueden parecer, con razón, un poco incompletas o heurísticas. Estoy abierto a sugerencias si quieres profundizar más.

Consideramos el siguiente conjunto de puntos asociado a una suma trigonométrica:

$$\mathcal{P}(N) = \{(\Re(S_m), \Im(S_m))\}_{m=1}^N \quad \text{con} \quad S_m = \sum_{n=1}^m e(f(n)).$$

Es decir, dibujamos los números complejos $S_1, S_2, \dots, S_N$ de la manera habitual como puntos en el plano. En principio, si f crece lo suficiente, uno esperaría que los sumandos $e(f(n))$ se comportasen al azar, como variables aleatorias independientes, y que, por tanto, $\mathcal{P}(N)$ fuera una nube informe de puntos. Sin embargo, en algunas situaciones se observan curiosos patrones geométricos, sobre todo de naturaleza espiral. El primer ejercicio es solo para que veas a qué me refiero (si tienes acceso a [2] o a [1], allí está el dibujo en un rango mayor).

1) Con `sagemath` o el paquete matemático con prefieras, dibuja $\mathcal{P}(2500)$ para $f(x) = x^{3/2}$.

La explicación completa de esta curiosa estructura no es fácil. En la última parte de esta hoja estudiaremos un ejemplo que solo difiere en una constante y que tiene una estructura más simple. Para $f(x) = x^{3/2}$ lo único que vamos a ver en los dos ejercicios siguientes es un modelo sencillo para entender en qué momento aparecen los centros de las espirales. Cerca de ellos parece que S_m se queda casi constante, es decir, $S_{m-k} \approx S_m$ para algún k pequeño y cuanto más pequeño sea k menos oportunidades daremos a que S_m varíe, lo que sugiere que estaremos más cerca del centro. Como $|S_m - S_{m-1}| = 1$, descartamos el caso $k = 1$ lo que nos lleva a considerar $k = 2$.

2) Explica por qué $S_{m-2} \approx S_m$ conduce a la ecuación $m^{3/2}(1 - (1 - m^{-1})^{3/2}) = n + \frac{1}{2}$ con n entero. Utiliza la aproximación de Taylor para $1 - (1 - x)^{3/2}$ y concluye que m debe ser aproximadamente $\frac{4}{9}(n + \frac{1}{2})^2$.

¹<https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/APlatex24.pdf>

3) Destaca (por ejemplo, con otro color) en el dibujo del primer ejercicio los puntos que corresponden a S_m con m el entero más cercano a $\frac{4}{9}(n + \frac{1}{2})^2$ con n entero y verás que quedan cerca de los centros de las espirales, los cuales quedan aproximados por los puntos correspondientes a $\frac{1}{2}(S_m + S_{m-1})$. Combina lo que te he contado aquí, el ejercicio anterior y lo que se te ocurra para explicar este fenómeno con tus palabras.

Consideremos ahora el caso $f(x) = \frac{t_0}{2\pi} \log x$. Este es crucial en teoría de números (tiene que ver con la función ζ de Riemann [4]). Si se supiera acotar bien S_m cuando t_0 es grande, se podrían obtener importantes resultados sobre la distribución de los primos. Aquí nos vamos a ocupar solo de casos con t_0 pequeño.

4) Dibuja $\mathcal{P}(480)$ para $f(x) = \frac{t_0}{2\pi} \log x$ con $t_0 = 3$ y superpón el dibujo de la *espiral equiangular* (llamada también *logarítmica* [6]) dada por la ecuación en coordenadas polares $r = ae^{\theta/3}$ donde $a = \frac{1}{\sqrt{10}} \exp(\frac{1}{3} \arctan 3)$. Comprueba que aproxima muy bien.

5) Utiliza el Teorema 1 de la hoja anterior y el primer lema de van der Corput para demostrar que para esta f se tiene $S_m = \int_1^m e(f(x)) dx + O(1)$.

6) Evalúa la integral y, con ello, explica la aproximación por la espiral equiangular indicada. Para ver que lo has entendido, fijado $0 < t_0 < 2\pi$ escribe una ecuación en coordenadas polares para la espiral equiangular que aproxima.

Ahora vamos a ver otro ejemplo en el que también sale una única espiral, pero en vez de ser equiangular es una *espiral de Arquímedes* [5], es decir, el radio crece proporcionalmente con el ángulo en vez de exponencialmente.

7) Considera $f(x) = \pi^{-1} \sqrt{x/2}$, dibuja $\mathcal{P}(500)$ y comprueba que es muy similar a la espiral $(t \sin t + \cos t - 3/2, -t \cos t + \sin t)$ con $1 \leq t \leq \sqrt{1000}$.

8) Procediendo como antes con el Teorema 1 de la hoja anterior, da una explicación de este fenómeno salvo por el $3/2$ (que, por supuesto, es pequeño en comparación con los términos multiplicados por t).

Solo para tu curiosidad, en principio todo debería funcionar igual para $f(x) = \alpha \sqrt{x}$, pero a partir de cierto α se deja de ver la espiral y aparecen ciertas ramas parabólicas. La razón es que la separación entre vueltas consecutivas se estrecha y nuestra vista tiende a conectar los puntos cercanos entre ellas. Una explicación matemática de esta especie de ilusión óptica y lo necesario para entender el $3/2$, que en nuestro caso queda absorbido por un término $O(1)$, están en [1], pero no es fácil.

Como último ejemplo, tomemos $f(x) = 2(x/3)^{3/2}$ que solo difiere del ejemplo inicial en una constante, sin embargo el aspecto de la figura es más simple.

9) Dibuja $\mathcal{P}(2500)$ para $f(x) = 2(x/3)^{3/2}$. Con el propósito de ahorrar espacio y de com-

parar los resultados, te sugiero que pongas en tu trabajo este dibujo y el del primer ejercicio (quizá ya combinado con el del tercero) en una misma figura uno al lado del otro.

Según el Teorema 1 de la hoja anterior y un cambio de variable $x = n^2 t$, la suma oscilatoria S_m se aproxima por

$$\sum_{1 \leq n \leq 1 + \sqrt{m/3}} \int_1^m e(f(x) - nx) dx = \sum_{1 \leq n \leq 1 + \sqrt{m/3}} n^2 \int_{1/n^2}^{m/n^2} e(n^3(f(t) - t)) dt$$

He omitido la integral correspondiente a $n = 0$ que es $O(1)$ por el primer Lema de van der Corput. Nota que $f(t) - t$ tiene un único punto crítico en $t = 3$ y que pertenece al intervalo de integración si $n \leq \sqrt{m/3}$. Ahora hacemos una trampa motivada por la idea de la segunda hoja de que la mayor contribución a una integral oscilatoria viene de los puntos críticos. La contribución de los términos de frontera correspondientes a los extremos de integración o de puntos cercanos a ellos debería ser de orden inferior (de hecho, está relacionada con la oscilación de las espirales). La trampa en términos matemáticos consiste en suponer que podemos sustituir la última integral por una integral en $\mathbb{R}$ contra una función a de soporte compacto que vale 1 en un entorno del punto crítico, por ejemplo en $(2, 4)$. Esto es,

$$S_m \approx \sum_{1 \leq n \leq \sqrt{m/3}} n^2 \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e(n^3(f(t) - t)) dt \quad \text{con } a \in C_0^\infty, \quad a|_{[2,4]}(x) = 1.$$

Mi recomendación es que en tu trabajo solo escribas algo en la línea del párrafo anterior para indicar que es creíble y que dejes claro que no estamos justificando qué sentido preciso tiene $\approx$, tomamos como hipótesis que la aproximación se cumple en algún sentido. Si quieres dar una referencia acerca de cómo completar este punto, puedes citar [4, §3.3] o [3, Th. 8.16].

10) Aplicando el Teorema 2 de la hoja 2 (el principio de fase estacionaria) con $\lambda = n^3$ y $k = 1$, muestra que la aproximación anterior para S_m es

$$\sum_{1 \leq n \leq \sqrt{m/3}} (\sqrt{3}(1+i)n^{1/2} + O(n^{-5/2})) = \frac{2+2i}{\sqrt{3}}(m/3)^{3/4} + O(m^{1/4}).$$

Indicación: Para la igualdad, debes justificar $\sum_{n=1}^N n^{1/2} = \frac{2}{3}N^{3/2} + O(N^{1/2})$. Si no se te ocurre con argumentos elementales, puedes apelar al primer ejercicio de la hoja anterior.

11) A la luz de este resultado, explica por qué $\mathcal{P}(N)$ debe aproximarse razonablemente bien por el segmento de recta $y = x$ con $1 \leq x \leq 2N^{3/4}/3^{5/4}$. Adapta el análisis del comienzo de esta hoja para localizar en qué puntos de esta recta están los centros de las espirales.

12) Comprueba en la figura que has hecho para $N = 2500$ que las predicciones del ejercicio anterior son precisas.

Este último ejercicio es opcional, solo por si tienes tiempo, espacio y ganas o quieres mencionar el fenómeno en tu trabajo.

13) [Opcional] A pesar de que $f(x) = (2x/3)^{3/2}$ difiere en una constante de los ejemplos considerados al principio y al final de esta hoja, el aspecto de $\mathcal{P}(2500)$ es completamente distinto. ¿Sabrías explicar por qué ya no aparece un segmento de la recta $y = x$ de tamaño comparable a $N^{3/4}$?

Tarea a entregar. Combinando las soluciones de los ejercicios anteriores en un documento que dé lugar al cuarto capítulo de tu TFG bajo el título *Algunos aspectos geométricos* o la variante que prefieras. Mi recomendación es que no pases de las 6 páginas. Si las figuras te ocuparan mucho, algunas pueden ir a un apéndice. Intenta evitarlo. Como te sugiero en uno de los ejercicios, imágenes relacionadas se podrían agrupar poniéndolas una al lado de la otra.

Referencias

- [1] F. Chamizo and D. Raboso. Van der Corput method and optical illusions. *Indag. Math. (N.S.)*, 26(5):723–735, 2015.
- [2] J.-M. Deshouillers. Geometric aspect of Weyl sums. In *Elementary and analytic theory of numbers (Warsaw, 1982)*, volume 17 of *Banach Center Publ.*, pages 75–82. PWN, Warsaw, 1985.
- [3] H. Iwaniec and E. Kowalski. *Analytic number theory*, volume 53 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [4] H. L. Montgomery. *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, volume 84 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [5] Wikipedia contributors. Archimedean spiral — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Archimedean_spiral&oldid=1251955193, 2024. [Online; accessed 9-February-2025].
- [6] Wikipedia contributors. Logarithmic spiral — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Logarithmic_spiral&oldid=1270340202, 2025. [Online; accessed 9-February-2025].