

En las hojas anteriores hemos estudiado cómo acotar o estimar integrales oscilatorias. En esta hoja nos ocuparemos de las sumas oscilatorias del tipo $\sum_{n=a}^b e(f(n))$. Parece que ambos temas no tienen mucho que ver, pues $e(f(x))$ puede tener mucha cancelación al ser integrada y no tener ninguna al restringirse a los enteros. Por ejemplo, $\sum_{n=1}^N e(n) = N$ y $\int_1^N e(x) dx = 0$. Curiosamente, esta primera impresión es errónea, las integrales oscilatorias constituyen una herramienta fundamental para estimar sumas oscilatorias y el propio van der Corput inició una teoría en ese sentido en parte recogida en esta hoja. En particular, probaremos

Teorema 1. *Sea $f \in C^2([a, b])$, $a, b \in \mathbb{Z}$, tal que f'' no se anula en $[a, b]$. Si $\alpha < f'(x) < \beta$ para $x \in [a, b]$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ y $\beta - \alpha > 1$, entonces*

$$\sum_{n=a}^b e(f(n)) = \sum_{n=\alpha}^{\beta} \int_a^b e(f(x) - nx) dx + O(\log(\beta - \alpha)).$$

En este y en el resto de los resultados suponemos implícitamente que $[a, b]$ es un intervalo no trivial, es decir $a < b$. Como veremos, con lo que sabes sobre integrales oscilatorias, de aquí se deduce que si f'' es pequeña, pero no demasiado pequeña, entonces siempre hay cancelación. En concreto, el resultado es:

Teorema 2. *Sea $f \in C^2([a, b])$, $a, b \in \mathbb{Z}$, y $0 < \lambda_2 < 1 < \mu$ tales que $\lambda_2 \leq |f''(x)| \leq \mu\lambda_2$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces se tiene*

$$\sum_{n=a}^b e(f(n)) = O(\mu(b-a)\lambda_2^{1/2} + \lambda_2^{-1/2}).$$

Aquí el uso de la O de Landau solo indica que el valor absoluto de la suma es menor o igual que una constante absoluta, que no vamos a calcular, multiplicada por lo que aparece dentro de la O . En realidad la condición $0 < \lambda_2 < 1 < \mu$ es innecesaria, basta $\lambda_2 \neq 0$, pues $\lambda_2 > 0$, $\mu \geq 1$ se sigue de $\lambda_2 \leq |f''(x)| \leq \mu\lambda_2$ y para $\lambda_2 \geq 1$ el resultado es trivial.

Añadiendo una idea nueva, hay una generalización del último resultado que requiere control sobre la derivada k -ésima para algún $k \geq 2$. Solo veremos el caso $k = 3$ que captura la esencia del método (hay versiones para k mayores en [1, Th. 2.8] y [2, Th. 8.20]).

Teorema 3. *Sea $f \in C^3([a, b])$, $a, b \in \mathbb{Z}$, y $0 < \lambda_3 < 1 < \mu$ tales que $\lambda_3 \leq |f'''(x)| \leq \mu\lambda_3$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces se tiene*

$$\sum_{n=a}^b e(f(n)) = O(\mu^{1/2}(b-a)\lambda_3^{1/6} + (b-a)^{1/2}\lambda_3^{-1/6}).$$

A pesar de que, como he dicho, los resultados sobre sumas oscilatorias provienen de integrales oscilatorias, los primeros suelen tener más complicación técnica. Es normal que esta hoja

te cueste más que las anteriores. Todos los resultados están en las referencias [1], [2] y [3], pero menos explicados que en los ejercicios y si te atascas no tengo claro si te sacarán de dudas.

Para la prueba del Teorema 1 comenzaremos con una identidad que permite expresar una suma como una integral. Si tienes curiosidad, hay una generalización interesante llamada *fórmula de Euler-Maclaurin* que consigue cada vez más precisión a base de complicar la segunda integral y añadir nuevos términos [4].

1) Para $g \in C^1([a, b])$, $a, b \in \mathbb{Z}$, demuestra

$$\sum_{n=a+1}^b g(n) = \int_a^b g + \int_a^b (x - \lfloor x \rfloor) g'(x) dx$$

donde $\lfloor x \rfloor$ indica la parte entera. **Indicación:** Para cada entero $n \in [a, b)$ calcula explícitamente la última integral en el intervalo $[n, n+1]$.

Una vez que hemos escrito una suma en términos de integrales, queremos que las integrales sean oscilatorias, como las de las hojas anteriores, sin la fea función discontinua $\lfloor x \rfloor$. Para ello sustituimos $x - \lfloor x \rfloor$ por su desarrollo en serie de Fourier (¿ves que $x - \lfloor x \rfloor$ es 1-periódica?). Dicho desarrollo es:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{e(nx)}{n}.$$

Aunque son unas cuentas sencillas, no hace falta que lo compruebes. Para no desviarnos de la cuestión apelando a resultados que no sé si has visto ya en el grado, en el siguiente problema no entres en discusiones acerca de la convergencia. Da por supuesto que el intercambio de la suma e integral que hay que hacer es lícito.

2) Con la notación del Teorema 1, aplica el ejercicio anterior a $g(x) = e(f(x) - \alpha x)$ para obtener

$$\sum_{n=a}^b e(f(n)) = \int_a^b e(f(x) - \alpha x) dx + \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{n} I_n + O(1)$$

con

$$I_n = \int_a^b (f'(x) - \alpha) e(f(x) - (\alpha + n)x) dx.$$

Quizá te parezca que hay un signo mal en n . Piensa por qué es indiferente.

3) Muestra que $I_n = n \int_a^b e(f(x) - (\alpha + n)x) dx + O(1)$ y explica por qué el Teorema 1 se deduce si probamos

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{|n|} |I_n| + \sum_{n=\beta-\alpha+1}^{\infty} \frac{1}{n} |I_n| = O(\log(\beta - \alpha)).$$

4) Para $n \notin [0, \beta - \alpha]$ integra por partes en

$$I_n = \int_a^b \frac{f'(x) - \alpha}{f'(x) - (\alpha + n)} \cdot (f'(x) - (\alpha + n)) e(f(x) - (\alpha + n)x) dx,$$

tomando como partes las funciones separadas por un punto. Deduce de ello

$$\pi |I_n| \leq \frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha - n|} \quad \text{para } n \notin [0, \beta - \alpha].$$

Indicación: Esto se parece a lo hecho en los ejercicios 4) y 7) de la primera hoja. Emplea $|e(t)| = 1$ y que si g es monótona de signo constante $\int_a^b |g'| = |g(b) - g(a)| = ||g(b)| - |g(a)||$. También conviene que consideres que $h(t) = |t - \alpha|/|t - \alpha - n|$ es creciente en $[\alpha, \beta]$ ya que es el valor absoluto de una función monótona que no se anula en $(\alpha, \beta]$.

5) Utiliza la desigualdad para $|I_n|$ para completar la prueba del Teorema 1. **Indicación:** Descomponiendo en fracciones simples $-\frac{\beta - \alpha}{n(\beta - \alpha - n)} = \frac{1}{n - (\beta - \alpha)} - \frac{1}{n}$.

El Teorema 2 es una consecuencia rápida del Teorema 1 acotando las sumas oscilatorias.

6) Con la notación de los teoremas 1 y 2 explica por qué el teorema del valor medio asegura que podemos escoger α y β tales que $\beta - \alpha \leq \mu \lambda_2(b - a) + 2$. Con ello, deduce el Teorema 2 del Teorema 1 aplicando el segundo lema de van der Corput para acotar las integrales.

Para el Teorema 3 se necesita una desigualdad combinatoria. En vez de descomponerla en varios ejercicios, te voy a pedir que la leas.

7) Lee el Lemma 8.17 en [2, p. 212] (te pasaré una copia de esa página para que no lo tengas que buscar en la biblioteca). Adapta el enunciado y la prueba para tu trabajo de forma que se aplique a $|\sum_{n=a}^b z_n|^2$, con $a < b$ enteros. Incluye las explicaciones que consideres necesarias en los puntos que te parezcan poco claros.

Deduciremos el Teorema 3 tomando en la desigualdad del problema anterior $z_n = e(f(n))$ y $Q = \lfloor \lambda_3^{-1/3} \rfloor$. La parte entera no es relevante para las estimaciones porque $\frac{1}{2} \lambda_3^{-1/3} \leq Q \leq \lambda_3^{-1/3}$ es bastante inmediato.

8) Explica por qué el Teorema 3 es trivial para $\lambda_3^{-1/3} \geq b - a$ y por tanto podemos suponer $1 + (b - a)/Q = O(\lambda_3^{1/3}(b - a))$, de modo que la desigualdad implica

$$\left| \sum_{n=a}^b e(f(n)) \right|^2 = O \left(\lambda_3^{1/3}(b - a) \sum_{|q| \leq Q} \left| \sum_{n, n+q \in [a, b]} e(f(n+q) - f(n)) \right| \right)$$

y separando la contribución de $q = 0$ y usando la simetría $q \leftrightarrow -q$, el lado derecho resulta

$$O \left(\lambda_3^{1/3}(b - a)^2 + \lambda_3^{1/3}(b - a) \sum_{q=1}^Q \left| \sum_{n, n+q \in [a, b]} e(f(n+q) - f(n)) \right| \right).$$

9) Por el teorema del valor medio, $q\lambda_3 \leq |f''(n+q) - f''(n)| \leq \mu q\lambda_3$ y se puede aplicar el Teorema 2 a la suma interior. Haz los cálculos y deduce el Teorema 3. Indicación: ¿Ves claro que $\sum_{q=1}^Q q^{1/2} = O(Q^{3/2})$ y $\sum_{q=1}^Q q^{-1/2} = O(Q^{1/2})$? Recuerda también la desigualdad trivial $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ para $x, y > 0$.

Para terminar, vamos a experimentar con los teoremas considerando como ejemplo sumas oscilatorias del tipo

$$S_N = \sum_{n=N}^{2N} e\left(\frac{n^\delta}{N}\right)$$

con $\delta > 0$ fijado y N grande. La estimación trivial es $S_N = O(N)$ ya que $|S_N|$ es menor o igual que el número de términos en la suma.

10) Comprueba que para $\delta = 1/2$ y $\delta = 7/2$ el Teorema 2 da acotaciones para S_N peores que la trivial. Halla el intervalo de valores de δ para los que el resultado es no trivial. ¿Qué acotación se obtiene con el Teorema 3 cuando $\delta = 7/2$?

Se infiere que el Teorema 2 es deficiente si la gráfica de f está muy poco curvada o muy curvada. Lo segundo es lógico porque $f(n)$ podría capturar muchos enteros impidiendo que $e(f(n))$ oscile, aunque todavía hay una oportunidad con el Teorema 3. Lo primero no lo es tanto y la aplicación directa del Teorema 1 puede dar mejores resultados. El caso $\delta = 1$ es singular, el Teorema 2 ni siquiera es aplicable porque $f'' = 0$, mientras que utilizando la suma de una progresión geométrica se sigue $S_N = 1$, en particular, $S_N = O(1)$.

11) Para $\delta = 1$, obtén el resultado óptimo $S_N = O(1)$ a partir del Teorema 1.

Tarea a entregar. Tienes que escribir un documento que contenga los enunciados de los teoremas y sus pruebas, combinando las soluciones de los ejercicios anteriores. Esta hoja no es larga si no pones demasiados detalles. Te recomiendo que no excedas 7 páginas. El resultado debe dar lugar a un segundo capítulo de tu TFG llamado *El método de van der Corput* o *Sumas trigonométricas* o alguna otra variante que prefieras.

Referencias

- [1] S. W. Graham and G. Kolesnik. *van der Corput's method of exponential sums*, volume 126 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

- [2] H. Iwaniec and E. Kowalski. *Analytic number theory*, volume 53 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [3] H. L. Montgomery. *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, volume 84 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [4] Wikipedia contributors. Euler-Maclaurin formula — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler%E2%80%93Maclaurin_formula&oldid=1251381090, 2024. [Online; accessed 7-December-2024].