Hay un tema clásico fundamental en física que ha sobrevivido a las revoluciones relativista y cuántica, incluso se ha revitalizado. Se manifiesta en diferentes contextos en la introducción de los llamados lagrangianos y hamiltonianos ligados a un principio de mínima acción (aunque matemáticamente habría que decir de acción estacionaria). En palabras menos técnicas, se busca representar sistemas complicados mediante una ley sencilla e independiente de las coordenadas elegidas del tipo que el gasto de energía sea mínimo, en la línea de la famosa frase de Euler "Como el tejido del Universo es el más perfecto y es la obra del Creador más sabio, nada tiene lugar en el Universo en que no aparezca alguna relación de máximo o mínimo". Nuestro objetivo es mostrar una ley de este tipo que da lugar a las ecuaciones de Maxwell.

Esta hoja tiene un formato un poco diferente de las anteriores en el sentido de que hay muchas explicaciones mías en comparación con el número de ejercicios y solo dos de ellos son realmente importantes. La razón es que prefiero que no profundicemos demasiado en cosas que no has visto, sobre todo técnicas, y reemplazarlas por algunas ideas, aunque sean vagas. Lo que tengo en mente es que el resultado sea un capítulo breve, independientemente de que hayas aprendido ideas nuevas y relevantes.

El tensor electromagnético. En la línea de lo mencionado en el primer párrafo, lo que hay que minimizar para obtener las ecuaciones de Maxwell, está relacionado con el llamado *tensor electromagnético* que nació con la relatividad especial y está estrechamente ligado a las transformaciones de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ que viste en el capítulo pasado. Si no estoy equivocado, el primero que lo introdujo fue Minkowski [6]. Una limitación que vamos a tener es que no nos meteremos en la base teórica de la subida y bajada de índices que deriva del análisis tensorial porque, según me dijiste, no te era familiar y llevaría demasiado esfuerzo hacerlo aquí. Por eso, las definiciones siguientes te parecerán más arbitrarias todavía de lo que son en realidad. Más adelante incluiré algunas explicaciones al respecto.

Recuerda, en primer lugar, que en el contexto relativista era conveniente considerar el cuadrivector formado por los potenciales $(\phi, \vec{A})$. Denotaremos sus coordenadas (A^0, A^1, A^2, A^3). Lo habitual es usar letras griegas cuando uno se refiere a todas las coordenadas y letras latinas para las tres últimas. Así se escribe $(A^\mu) = (\phi, \vec{A})$ y $(A^i) = \vec{A}$. ¿Por qué no escribimos A_μ, que sería lo lógico? Porque es conveniente (por razones de las que solo te daré algunos indicios) reservar esta notación para cambiar de signo a las tres últimas coordenadas, esto es, $A_0 = A^0 = \phi$ y $(A_i) = -(A^i) = -\vec{A}$. En una fórmula, $(A_\mu) = (\phi, -\vec{A})$.

Recuerda también que fue conveniente definir la variable $T = ct$ para que cuadraran las unidades. Ahora la llamaremos x^0 y completamos un cuadrivector con las variables espaciales: $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$. En analogía con lo anterior, los subíndices indican un cambio de signo de las tres últimas: $(x_\mu) = (ct, -x, -y, -z)$.

Con estas notaciones, definimos $F^{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}$ como

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \qquad \text{y} \qquad F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}.$$

Se dice que las 16 expresiones $F^{\mu\nu}$, $0 \le \mu, \nu \le 3$, conforman el *tensor electromagnético*. En qué sentido es un *tensor*, término que seguramente conoces, es algo sobre lo que hablaré después. Lo mismo se dice de $F_{\mu\nu}$. Si sabes algo del tema, unas son las componentes contravariantes y otras las covariantes del mismo objeto.

1) Las componentes $F^{\mu\nu}$ se ordenan de forma natural en una matriz de forma que $\mu+1$ indica la fila y $\nu+1$ la columna. Muestra que dicha matriz en términos de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indicación: Por la antisimetría $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ basta ocuparse de $0 \le \mu < \nu \le 3$, de los seis elementos por encima de la diagonal principal. Los tres de la primera fila se pueden hacer de un golpe mediante

$$\big(F^{0i}\big) = \Big(\frac{\partial A^i}{\partial x_0} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\Big) = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla\phi = -\vec{E}.$$

Si no ves estas igualdades fácilmente, añade las explicaciones que necesites en tu trabajo.

2) Escribe también (o describe con palabras) la matriz que corresponde a $F_{\mu\nu}$. Esto no debería requerir apenas cálculos adicionales.

Nota que debido a que estas expresiones matriciales solo dependen de los campos, no aparecen potenciales sueltos, el tensor electromagnético es invariante por cambios de *gauge*. Esto también se podría deducir a partir de las definiciones de $F^{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}$.

La principal razón para introducir el tensor electromagnético es su propia tensorialidad que te explicaré más adelante. Sin embargo, su definición ya nos da una forma atractiva y simétrica de escribir las ecuaciones de Maxwell (en ausencia de cargas y corrientes) sin necesidad de especificar ningún *gauge*. Recuerda que el solo hecho de utilizar los potenciales escalar y vector, da la segunda y la tercera ecuaciones de Maxwell.

3) Prueba que las otras dos ecuaciones de Maxwell equivalen a

$$\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \qquad \text{para} \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{1}$$

En definitiva, una vez que empleamos los potenciales, las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como una especie de divergencia en cuatro dimensiones. Por otro lado, la definición de $F^{\mu\nu}$ es una especie de rotacional en cuatro dimensiones. Por si acaso te suena, estos operadores tienen que ver con formas diferenciales y por tanto es posible dar una formulación geométrica de las ecuaciones de Maxwell (incluso con fuentes) que tiene el aspecto $d\mathbf{F} = 0$, $d\star\mathbf{F} = \mathbf{J}$ donde $\mathbf{F}$ es una 2-forma diferencial asociada al tensor electromagnético, $\mathbf{J}$ es una 3-forma diferencial asociada a cargas y corrientes y $\star$ indica cierta operación llamada *dual de Hodge*. Si tienes curiosidad, mira por ejemplo [8].

Vamos ahora con el carácter tensorial. Un tensor es algo así como una aplicación lineal en las que se admiten varias variables vectoriales. El concepto no es profundo, pero la notación sintética al uso, sobre todo en física, con subidas y bajadas de índices hace que desde fuera parezca más complicada de lo que es. Dicha notación resume que los cambios de base se hacen esencialmente por multiplicaciones de matrices. Por ejemplo, si M es la matriz que corresponde a $F_{\mu\nu}$, al cambiar de observador mediante una transformación de Lorentz representada con una matriz Λ, la nueva matriz será $M' = \Lambda^t M \Lambda$. Con la notación tensorial, el elemento $\mu\nu$ de Λ se denota Λ^μ_ν y, recordando cómo se multiplican matrices, el elemento $\mu\nu$ de M' es $\sum_\rho \sum_\tau \Lambda^\rho_\mu F_{\rho\tau} \Lambda^\tau_\nu$ que los físicos sueles escribir omitiendo los sumatorios como $F_{\rho\tau}\Lambda^\rho_\mu \Lambda^\tau_\nu$. La filosofía general, no solo en este caso, es que los cambios de base corresponden a sumas de multiplicaciones por elementos de la matriz de cambio de forma que los índices estén compensados: los de abajo se "cancelen" con los de arriba y solo subsistan los índices de los que habíamos partido. Esto es mucho más cómodo y fácil de recordar que tratar de traducir todo en términos de matrices. La relación $F'_{\mu\nu} = F_{\rho\tau}\Lambda^\rho_\mu \Lambda^\tau_\nu$ (con la notación física, esto es, suprimiendo los sumatorios) equivale a la que viste en el capítulo anterior para transformar $\vec{E}$ y $\vec{B}$. La razón última de introducir el tensor electromagnético es que esta relación es natural dentro de la filosofía anterior. Otro ejemplo de tensor, esta vez con un solo índice, es (A^μ). Su ley de transformación es que para un nuevo observador A^μ se transforma en $A^\rho \Lambda^\mu_\rho$, que equivale a lo que vimos de que había que premultiplicar por la matriz de la transformación de Lorentz. Si queremos saber cómo transformar A_μ, no hay que pensar nada, sería $A_\rho \Lambda^\rho_\mu$. Sin embargo, hay una diferencia y es que para índices abajo (covariantes) se usan transformaciones de Lorentz que pasa mediciones de O' a las de O y para índices arriba (contravariantes) las que pasan mediciones de O a las de O'.

Mecánica lagrangiana. Por lo que me has dicho, sabes cálculo de variaciones, pero no demasiado sobre su uso en mecánica. La idea es que en situaciones básicas con un campo conservativo, se define el *lagrangiano* $L = T - V$ donde T es la energía cinética y V la potencial y se considera la *acción* $S = \int_a^b L\,dt$ correspondiente a un periodo de tiempo $t \in [a, b]$. Resulta que al aplicar el cálculo de variaciones a S, las ecuaciones de Euler-Lagrange dan las ecuaciones de movimiento. En física a esto se le llama *principio de mínima acción*, aunque, en rigor, S no siempre se minimiza para soluciones de las ecuaciones. La gran ventaja es que podemos usar las coordenadas que nos apetezca representado solo los llamados *grados de libertad* estrictamente necesarios para describir el sistema. Por ejemplo, en un péndulo simple solo hay un grado de libertad: el ángulo $\theta = \theta(t)$. Las energías cinética y potencial, y por tanto el lagrangiano, se escriben en términos de θ y $\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\theta$. Si usamos, en vez de esta técnica, la fórmula $\vec{F} = m\vec{a}$ de la mecánica newtoniana nos vemos forzados a utilizar las dos (o tres) coordenadas del espacio ambiente y para quedarnos con la componente tangencial hay que introducir fuerzas un poco extrañas que no vemos (la tensión de la cuerda).

Ya te mencioné como referencias el libro [3] y los enlaces [5] y [2]. El primero de estos últimos está quizá demasiado sesgado al lado matemático, pero tiene la ventaja de tratar diferentes situaciones, como el caso de varias variables (p. 13) que está más cerca de lo que aplicaremos después para las ecuaciones de Maxwell. No te pido que mires con detalle estas referencias, basta con que des un vistazo a lo que te resulte interesante en ellas o en otras de tu elección.

Es conveniente tengas una idea de cómo se plantea el cálculo de variaciones en física porque casi seguro será diferente a lo que has visto en matemáticas. Allí se emplea el símbolo δ. Normalmente no se define su significado de forma demasiado rigurosa, solo se explica que δ indica que cambiamos las funciones q_i que aparecen en el lagrangiano por otras cercanas con las mismas condiciones de frontera y el principio de mínima acción se enuncia como $\delta S = 0$. Para dar sentido riguroso a δ una posibilidad es considerar que indica el coeficiente de Taylor (alrededor de cero) de primer grado en ϵ al cambiar q_i por $q_i + \epsilon\eta_i$ en una función (funcional) de los q_i y los $\dot{q}_i$, donde η_i son funciones C^∞ arbitrarias tales que ellas y sus derivadas se anulan en los extremos, esto es, $\delta = \frac{\partial}{\partial\epsilon}\big|_{\epsilon=0}$. Por ejemplo $\delta q_i = \eta_i$ y se cumplen las propiedades que los físicos utilizan como naturales:

$$\frac{d}{dt}\delta q_i = \delta\dot{q}_i, \qquad \delta(fg) = (\delta f)g + f(\delta g), \qquad \delta F(q_1, \dots, q_n) = \frac{\partial F}{\partial q_i}\delta q_i.$$

Con esta notación la manera de ver en un texto de física de que el principio de mínima acción $\delta S = 0$ lleva a las ecuaciones de Euler-Lagrange para $L = L(q_1, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d)$ se reduce a

$$\delta S = \int_a^b \delta L\, dt = \int_a^b \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\Big)dt = \int_a^b \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big)\delta q_i\, dt$$

donde el último paso se sigue integrando por partes. Como δq_i son funciones arbitrarias, de $\delta S = 0$ se deduce

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

esto es, las ecuaciones de Euler-Lagrange.

4) Para asegurarte de que lo has entendido y para que lo pongas como ilustración previa de los métodos lagrangianos en tu trabajo, escribe cómo resolver el péndulo simple, intentando no volver a consultar las referencias. Aquí "resolver" significa únicamente llegar a la ecuación del péndulo $\ddot{\theta} + g\ell^{-1}\operatorname{sen}\theta = 0$ donde ℓ es la longitud y g es la aceleración de la gravedad.

Cuando uno sale del ámbito mecánico más básico con un número finito de partículas con ligaduras sencillas bajo un solo campo conservativo, la fórmula $L = T - V$ se queda corta. Los lagrangianos en situaciones más complejas se suelen construir a partir de simetrías de las que goza el sistema. Más adelante veremos algo de esto en relación con las ecuaciones de Maxwell. Lo aviso para que no te asustes con las próximas líneas del siguiente apartado.

El lagrangiano electromagnético. Este es el punto fundamental de esta hoja. Todo se reduce al siguiente ejercicio:

5) Si tomamos el lagrangiano (densidad lagrangiana)

$$L = -\frac{1}{16\pi}\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2}$$

entonces las ecuaciones que corresponden a que la acción $S = \int L\, d^4x$, donde d^4x abrevia $dx^0dx^2dx^2dx^3$, sea estacionaria son las ecuaciones de Maxwell (con $\rho = 0$, $\vec{\jmath} = \vec{0}$).

El factor $-(16\pi)^{-1}$ es obviamente irrelevante. En los cálculos de tu solución te puedes olvidar de él si lo prefieres. Se introduce, como veremos en parte después, para que sea coherente con otros términos que se añaden a L.

Te sugiero dos posibles vías, en realidad equivalentes, para que resuelvas el problema. La primera es que amplíes lo que has aprendido en apartado anterior y pruebes que para un lagrangiano L que depende de cierto campo vectorial (f^μ) con variables (x^μ) las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes son:

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big(\frac{\partial L}{\partial\big(\partial f^\mu/\partial x^\nu\big)}\Big) = \frac{\partial L}{\partial f^\mu}.$$

De esta fórmula con $(f^\mu) = (A^\mu)$ y L como en (2), debes deducir (1), que, según hemos visto, equivale a las ecuaciones de Maxwell una vez que empleamos potenciales.

La otra vía (para mi gusto más aconsejable) es justificar los detalles en las siguientes igualdades. Cae dentro de lo que es habitual leer en los textos de física, salvo que allí se omiten los sumatorios.

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{1}{8\pi}\sum_{\mu,\nu}\int F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}\, d^4x = -\frac{1}{8\pi}\sum_{\mu,\nu}\int F^{\mu\nu}\Big(\frac{\partial(\delta A_\nu)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial(\delta A_\mu)}{\partial x^\nu}\Big)\, d^4x \\ &= -\frac{1}{4\pi}\sum_{\mu,\nu}\int F^{\mu\nu}\frac{\partial(\delta A_\nu)}{\partial x^\mu}\, d^4x = \frac{1}{4\pi}\sum_{\mu,\nu}\int \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}\delta A_\nu\, d^4x\end{aligned}$$

y como δA_ν son funciones arbitrarias, se sigue (1) notando $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$. Para la primera igualdad se necesita $\delta\big(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\big) = 2F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}$, para la segunda poco más que la definición de $F_{\mu\nu}$, para la tercera la antisimetría y para la cuarta integrar por partes. Explica cada paso con el nivel que te parezca adecuado, si eliges esta vía.

En la acción S no hemos especificado los límites de la integral. Esto es habitual porque lo único importante es que las variaciones en la frontera, lo que los físicos escriben δA_ν, se anulen. Análogamente, en el caso que conoces de una dimensión con $S = \int_a^b L\,dt$, el a y el b no aparecen en las ecuaciones de Euler-Lagrange.

En realidad, el lagrangiano electromagnético admite una expresión sencilla en términos de los campos.

6) Comprueba que L en (2) es igual a $\frac{1}{8\pi}\big(\|\vec{E}\|^2 - \|\vec{B}\|^2\big)$.

A pesar de que este último ejercicio sugiera que estamos complicando las cosas introduciendo el tensor electromagnético, en realidad la expresión (2) es más natural, al menos para la forma en la que razonan habitualmente los físicos. Esto nos lleva a preguntarnos cómo se le ocurre a uno (2). Podría parecer que es solo fruto de pura ingeniería inversa, sin embargo lo que se hace es buscar lagrangianos a partir de ciertas propiedades de simetría o al menos reducir en mucho las posibilidades. En particular, es fácil leer en textos de física la justificación en pocas líneas de por qué (2) es el único lagrangiano razonable [4], [1], [7] y lo mismo para (2) que veremos después. Para un matemático medio esos razonamientos parecen muy sospechosos por su falta de rigor, pero el caso es que los físicos han construido de esta forma, en otro contexto, el *modelo estándar* llegando a predecir partículas antes de que se descubrieran. A sabiendas de que seguramente no te convenza demasiado, te cuento por encima alguna idea sobre la construcción de (2). Lo que te he comentado de la tensorialidad y los índices lleva a que una cantidad es invariante por las transformaciones de Lorentz si desaparecen sus índices: los de arriba se "cancelan" con los de abajo suponiendo que se suma en ellos, de esta forma los cambios de base no los afectan. Los lagrangianos debieran tener esa propiedad para no entrar en conflicto con la relatividad especial. Con los pocos tensores asociados al campo que conocemos esto deja todavía muchas posibilidades, por ejemplo $\sum_\mu \sum_\nu F_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$ o $\sum_\mu A_\mu A^\mu$. El primero es nulo por la antisimetría y el segundo no es invariante por cambios de *gauge*, lo cual es malo porque las ecuaciones de Maxwell sí lo son (también causaría un decaimiento exponencial en la ley de Coulomb [7, 24-3]). Además las ecuaciones de Maxwell son lineales en las derivadas, así que buscamos (también en analogía con la mecánica) tensores que tengan derivadas y que no tengan potenciales sin derivar para que no se estropee la invariancia *gauge*. Se puede ver que lo único tensorial que se puede conseguir es esencialmente el tensor electromagnético y una pequeña variante que no lleva a nada nuevo, así que solo podemos combinar $F_{\mu\nu}$ y $F^{\mu\nu}$. Uno podría considerar cosas más complicadas que (2) como $F_{\mu\nu} F^{\nu\alpha} F_{\alpha\beta} F^{\beta\nu}$ sumando en cada uno de los índices, pero eso llevaría a potencias altas de las derivadas y queremos que en el resultado final solo aparezcan derivadas segundas (por (1), lo cual tiene su analogía con la mecánica), además estropearía la linealidad. De ahí se deduce que L debería ser cuadrático en las derivadas y solo podemos combinar dos tensores electromagnéticos.

Como un extra, ya que te gusta la física quizá te interese saber que el término $\sum_\mu A_\mu A^\mu$ que hemos descartado por la invariancia *gauge*, en la física de partículas está relacionado con la masa de la partícula que porta el campo y otra explicación de que no aparezca es que los campos electromagnéticos están asociados a los fotones que no tienen masa. Hasta ahí bien, pero resulta que en el modelo estándar hay otras partículas asociadas a campos que sí tienen masa y necesitarían términos que no son invariantes *gauge*. Es decir, de alguna forma la teoría dice que casi ninguna partícula elemental tiene masa y el experimento que casi todas la tienen. El *mecanismo de Higgs* se inventó como una artificio teórico para resolver este problema y, como sabes, el *bosón de Higgs* que lleva a cabo este artificio se descubrió hace unos años.

Incorporando cargas y corrientes. La pregunta natural de si hay un lagrangiano que dé las ecuaciones de Maxwell en el caso en que ρ y $\vec{\jmath}$ no son necesariamente nulos, tiene una respuesta afirmativa. Basta añadir un término a L. Antes de ello, es conveniente definir el *cuadrivector de corriente* completando $\vec{\jmath}$ con una primera coordenada asociada a la carga:

$$(j^\mu) = (c\rho, \vec{\jmath}).$$

7) Prueba que (1) se generaliza a

$$\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \qquad \text{para} \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

8) Si tomamos el lagrangiano (densidad lagrangiana)

$$L = -\frac{1}{16\pi} \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} \sum_{\mu=0}^{3} A_\mu j^\mu \tag{3}$$

entonces las ecuaciones que corresponden a que la acción $S = \int L \, d^4x$, donde d^4x abrevia $dx^0 dx^2 dx^2 dx^3$, sea estacionaria son las ecuaciones de Maxwell (equivalentes a la fórmula del ejercicio anterior).

Por supuesto, para estos dos ejercicios no tienes que partir de cero. Utilizando lo que ya has hecho, deberían requerir muy poco espacio. El último prácticamente se reduce a tener en cuenta que $\delta(A_\mu j^\mu) = j^\mu \delta A_\mu$.

El primer término de (3) está asociado al campo electromagnético en sí mismo, el segundo a la interacción de las cargas con el campo y hay un tercer sumando, que no veremos aquí, asociado a las partículas libres. Del lagrangiano completo se deducen no solo las ecuaciones de Maxwell, como hemos visto, sino también la fuerza de Lorentz. Los factores constantes raros en los términos aquí mostrados del lagrangiano vienen forzados para que el término que no se muestra tenga la normalización usada habitualmente en mecánica (o guarde una proporción sencilla). Para decir toda la verdad, ese nuevo término mecánico se añade más bien a la acción S en vez de al lagrangiano, está relacionado con la famosa fórmula $E = mc^2$ para la energía en reposo en el ámbito relativista. Si tienes interés y tiempo, cuando termines la hoja, lo puedes leer en [4].

Tarea a entregar. Combina los ejercicios anteriores para obtener el capítulo 4 de tu trabajo bajo el título “El lagrangiano electromagnético” o cualquier otro que consideres adecuado. La idea es que este capítulo sea breve. Dependiendo del espacio total que ocupe lo que llevas y, sobre todo, de las fuerzas y tiempo que tengas, puedo preparar una quinta hoja con algo mínimo sobre cuántica. Valorando todo esto, utiliza el espacio que necesites oportuno.

Referencias

[1] D. V. Galtsov, Iu. V. Grats, and V. C. Zhukovski. *Campos clásicos: enfoque moderno*. Editorial URSS, 2005.

[2] M. Ganz. Introduction to Lagrangian and Hamiltonian Mechanics. `http://image.diku.dk/ganz/Lectures/Lagrange.pdf`, 2008.

[3] H. Goldstein. *Classical mechanics*. Addison-Wesley Series in Physics. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., second edition, 1980.

[4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields. Vol. 2*. Course of theoretical physics. Elsevier Science, Oxford, fourth edition, 1975.

[5] S. J. A. Malham. An introduction to Lagrangian and Hamiltonian mechanics. `http://www.macs.hw.ac.uk/~simonm/mechanics.pdf`, 2016.

[6] H. Minkowski. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. *Math. Ann.*, 68(4):472–525, 1910.

[7] W. K. H. Panofsky and M. Phillips. *Classical electricity and magnetism*. Addison-Wesley Series in Physics. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, second edition, 1962.

[8] Wikipedia contributors. Mathematical descriptions of the electromagnetic field — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mathematical_descriptions_of_the_electromagnetic_field&oldid=1136569037`, 2023. [Online; accessed 19-February-2023].