En esta hoja vamos a introducir los potenciales escalar y vectorial y a deducir algunas soluciones particulares de interés dentro del electromagnetismo.

Antes de comenzar, me he dado cuenta de que en el capítulo 1 no pones todas juntas las ecuaciones de Maxwell con fuentes (aparecen por separado). Menciónalas en algún momento y numera el resultado para poder hacer referencia a ellas. Es decir, escribe

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{1}$$

A la hora de trabajar con las las ecuaciones de Maxwell es natural introducir ciertas funciones llamadas genéricamente *potenciales* que simplifican los cálculos. En principio son artificios matemáticos, las cantidades físicas siguen siendo $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Curiosamente, con la llegada de la revolución cuántica, la situación cambió y estos potenciales adquirieron relevancia física que podía manifestarse en los experimentos [5, 15-5]. Si completamos todo el plan, al final del trabajo veremos algo al respecto.

La existencia de los potenciales proviene de dos resultados de cálculo vectorial. El primero seguramente lo conoces. Ambos se refieren a campos vectoriales $\vec{F} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que suponemos en $C^2(\mathcal{U})$, con $\mathcal{U}$ abierto. No haremos hincapié en la regularidad y siempre daremos por supuesta la existencia de las derivadas que necesitemos.

1. Si $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ entonces localmente existe una función ϕ tal que $\vec{F} = -\nabla\phi$.
2. Si $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ entonces localmente existe un campo $\vec{A}$ tal que $\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$.

Aquí "localmente" significa que dado $p \in \mathcal{U}$ existe en un entorno de p que quizá no es todo $\mathcal{U}$. Las limitaciones para la extensión del entorno son topológicas.

1) Busca en la fuente que prefieras demostraciones de las dos afirmaciones anteriores y redáctalas para tu trabajo citando el original e intentando usar tus propias palabras (una posible referencia es [7]).

Las demostraciones que hayas encontrado te darán un método para calcular ϕ y $\vec{A}$. Veamos ahora un ejemplo típico de una obstrucción topológica que no permite la extensión de ϕ a todo el abierto.

2) Considera el campo $\vec{F} = \big(-y/(x^2+y^2), x/(x^2+y^2), 0\big)$ definido en el abierto $\mathcal{U}$ dado por todo $\mathbb{R}^3$ menos el eje Z. Demuestra que, a pesar de que $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, no es posible encontrar $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\vec{F} = -\nabla\phi$ en $\mathcal{U}$ y explica qué es lo que colapsa en la construcción de la demostración. Indicación: Para lo primero, integra $\vec{F}$ a lo largo de un camino que rodee al eje Z.

En lo sucesivo no nos preocuparemos de la extensión porque en nuestros ejemplos trabajaremos principalmente en $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$ donde la extensión es siempre posible.

3) Como aplicación de lo anterior, muestra que existen ϕ y $\vec{A}$ tales que

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \text{y} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Estos ϕ y $\vec{A}$ asociados al electromagnetismo se dice que son el *potencial escalar* y el *potencial vector*.

Una primera ventaja de estos potenciales es que reducen las ecuaciones de Maxwell de cuatro a dos. Hay otras ventajas que veremos más adelante al tratar la relatividad. En realidad no habría que hablar del potencial escalar y del potencial vector sino de un potencial escalar y de un potencial vector porque no están unívocamente determinados. Esto que parece una tontería matemática, es el punto de partida de las *teorías gauge* que tanto impacto han tenido en la física actual.

4) Comprueba que si ϕ y $\vec{A}$ son un potencial escalar y un potencial vector para ciertos $\vec{E}$ y $\vec{B}$, entonces $\phi - c^{-1}\partial_t f$ y $\vec{A} + \nabla f$ también lo son para cualquier f.

La f se dice que da el *gauge* (calibre, no se suele traducir) y hay algunos convenios, adecuados en diferentes contextos, para limitar la elección de f y que los potenciales sean únicos.

En parte de lo que viene a continuación, seguiré [6] ajustando las unidades. Si diera la casualidad de que lo consultas, nota que en las fórmulas anteriores hay una errata.

Estudiemos primero el caso estático. Es decir, con $\vec{E}$ y $\vec{B}$ independientes del tiempo.

5) Explica por qué siempre se puede ajustar el *gauge* para tener $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (a esto se le llama *gauge de Coulomb*) y deduce que las ecuaciones de Maxwell en el caso estático se reducen a las ecuaciones para ϕ y $\vec{A}$ dadas por

$$\Delta\phi = -4\pi\rho \qquad \text{y} \qquad \Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{\jmath} \tag{2}$$

con Δ el operador de Laplace. Indicación: Seguramente debas recordar de los cursos de ecuaciones que la ecuación de Poisson tiene solución. Si no sabes de qué te hablo, mira cualquier libro de EPDs (por ejemplo [4]) o al menos la Wikipedia [8].

Lo bueno de (2) es que las ecuaciones están desacopladas y dados ρ y $\vec{\jmath}$ las podemos resolver por separado. Físicamente, nos podemos ocupar primero del caso $\vec{B} = \vec{0}$ (no hay campo magnético) después del caso $\vec{E} = \vec{0}$ (no hay campo eléctrico) y sumar los resultados.

6) Lee en [2, §4] la deducción de la ley de Coulomb y escríbela con tus palabras explicando por qué corresponde a la solución de la primera ecuación de (2) cuando ρ es proporcional a una *delta de Dirac* que representa que la carga es puntual.

Para mayor simplicidad, supondremos que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ están definidas en todo $\mathbb{R}^3$ y eso elimina los problemas de extensibilidad de ϕ y $\vec{A}$, que también pasan a estar definidos en $\mathbb{R}^3$.

7) Redacta lo que has aprendido de la ecuación de Poisson para escribir las soluciones como

$$\phi = \int \frac{\rho(\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|}\, d^3\vec{s} \qquad \text{y} \qquad \vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{\jmath}(\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|}\, d^3\vec{s}$$

donde $\vec{r} = (x, y, z)$.

Espero no despistarte con mi notación un poco particular, medio matemática, medio física. Las integrales son triples, sobre $\mathbb{R}^3$, y $d^3\vec{s}$ significa $ds_1\, ds_2\, ds_3$. Utiliza en tu trabajo la notación que te resulte más familiar.

Veamos ahora una aproximación cuando la distribución de carga y magnética está concentrada cerca del origen o estamos lejos de su soporte. En ese caso, $|\vec{r}-\vec{s}|^{-1}$ se sustituye por un polinomio de Taylor en $\vec{s}$ alrededor del origen. El desarrollo comienza con

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{s}|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{r^3} + \dots \qquad \text{donde} \quad r = |\vec{r}|.$$

No es un hecho tan conocido entre los matemáticos que los puntos suspensivos, los términos de mayor orden, se escriben en función de los polinomios de Legendre [3, VII.5.5] y que originalmente Legendre los introdujo de esa forma.

8) Comprueba la aproximación de orden 1 anterior y obtén la aproximación

$$\phi \approx \frac{Q}{r} + \frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

donde

$$Q = \int \rho(\vec{s})\, d^3\vec{s} \qquad \text{y} \qquad \vec{d} = \int \vec{s}\rho(\vec{s})\, d^3\vec{s}.$$

A Q y $\vec{d}$ se les llama, respectivamente, *carga total* y *momento dipolar* (eléctrico). La interpretación física es que cuando estamos lejos de la distribución de cargas, nos parecerá que la carga es puntual en primera aproximación mientras que en segunda aproximación podemos considerar que hay un dipolo [2, §5] que representa la principal asimetría en la distribución.

Si repetimos el mismo argumento con $\vec{A}$, los análogos de Q y de $\vec{d}\cdot\vec{r}$ son las cantidades vectoriales

$$\int \vec{\jmath}(\vec{s})\, d^3\vec{s} \qquad \text{y} \qquad \int (\vec{r}\cdot\vec{s})\vec{\jmath}(\vec{s})\, d^3\vec{s}.$$

Sin embargo, no se consideran en esta forma. La primera integral, de hecho, es nula.

9) Usando que los campos son estáticos, muestra que $\vec{\jmath} = \big(\nabla\cdot(x\vec{\jmath}), \nabla\cdot(y\vec{\jmath}), \nabla\cdot(z\vec{\jmath})\big)$ y, suponiendo que el soporte de $\vec{\jmath}$ es compacto, deduce $\int \vec{\jmath}(\vec{s})\, d^3\vec{s} = \vec{0}$.

Manipular la segunda integral es un pequeño reto. A ver si lo consigues solo con las indicaciones que te doy o, todavía mejor, encuentras un atajo sin seguirlas.

10) Prueba que la segunda integral es $\vec{\mu}\times\vec{r}$ donde $\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int \big(\vec{s}\times\vec{\jmath}(\vec{s})\big)\, d^3\vec{s}$. A esta cantidad se le llama *momento dipolar magnético*. Indicación: Quizá te interese buscar información sobre el *triple producto vectorial* [9]. También te puede resultar útil probar y usar $j_n s_m + j_m s_n = \nabla\cdot(s_n s_m \vec{\jmath})$ para $n, m \in \{1, 2, 3\}$.

En definitiva, se obtiene la aproximación

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\vec{\mu}\times\vec{r}}{r^3}.$$

Físicamente esto es como representar la distribución magnética dada por $\vec{\jmath}$ por un solo imán elemental, cuya "fuerza" y dirección están representadas por $\vec{\mu}$.

Sin duda, la solución de las ecuaciones de Maxwell con mayor impacto en el mundo moderno son las ondas electromagnéticas en el caso del vacío: $\rho = 0$ y $\vec{\jmath} = \vec{0}$. Vamos a estudiar cómo se escriben en términos de los potenciales, restringiéndonos al caso de ondas planas.

11) De nuevo apelando a hechos conocidos de ecuaciones en derivadas parciales[1], explica por qué siempre se puede ajustar el *gauge* para tener $\nabla\cdot\vec{A} + c^{-1}\partial_t\phi = 0$ (a esto se llama *gauge de Lorenz*[2]) y deduce que las ecuaciones de Maxwell en el vacío se escriben como:

$$\Box\phi = 0 \qquad \text{y} \qquad \Box\vec{A} = \vec{0} \tag{3}$$

donde $\Box$ es el *operador de d'Alambert*, el que aparece en la ecuación de ondas con velocidad c. Esto es, $\Box f = c^{-2}\partial_t^2 f - \Delta f$.

Las soluciones más representativas de la ecuación de ondas son las oscilaciones armónicas dadas por senos y cosenos.

12) Sea $u = \operatorname{sen}(\vec{k}\cdot\vec{r} - c|\vec{k}|t)$ donde $\vec{k} \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$ es un vector dado, llamado *vector de ondas*. Comprueba que $\Box u = 0$. Esta u representa una *onda plana* que viaja en la dirección $\vec{k}$ con velocidad c. Es plana porque para cada tiempo fijado es constante en cada plano con vector normal $\vec{k}$. Tiene velocidad c porque también es constante cuando la proyección de $\vec{r}$ sobre $\vec{k}$ es c veces el tiempo. Si no ves estas cosas claras, explícalas.

---

[1] Específicamente, puedes dar por supuesto que fijada g la ecuación de ondas inhomogénea $c^{-2}\partial_t^2 f - \Delta f = g$ tiene una solución f.

[2] Algunos autores, por ejemplo [6], lo llaman *gauge* de Lorentz, pero esto no es muy correcto históricamente, a pesar de que Lorentz también se ocupó de las ondas electromagnéticas.

Motivados por esta solución tomamos $\vec{A} = \vec{A}_0 u$ con $\vec{A}_0$ un vector constante no nulo. El *gauge* de Lorenz permite elegir $\phi = Ku$ con K una constante relacionada con $\vec{A}_0$ y $\vec{k}$.

13) Demuestra

$$\vec{E} = \frac{(\vec{k} \times \vec{A}_0) \times \vec{k}}{|\vec{k}|} u_c \qquad \text{y} \qquad \vec{B} = (\vec{k} \times \vec{A}_0) u_c$$

donde u_c es como u cambiando el seno por un coseno (de nuevo te puede ser útil pensar en el triple producto vectorial [9]). Concluye que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son campos ortogonales entre sí y también a $\vec{k}$. Esto justifica la representación de las ondas electromagnéticas que aparece en muchos textos (por ejemplo [1]) como dos gráficas sinusoidales perpendiculares a lo largo de un eje.

Tarea a entregar. Combina los ejercicios anteriores para obtener el capítulo 2 de tu trabajo bajo el título "Los potenciales escalar y vectorial" o cualquier otro que consideres adecuado. La extensión recomendada son unas 6 páginas. Si ves que no es muy realista utiliza lo que necesites. Ten siempre en mente que la extensión final recomendada, con el formato de la plantilla, son 30 páginas. Si llegamos a completar los 5 temas del plan inicial, salen a una media de 6 páginas. Si hay material de sobra, siempre se puede mandar a un apéndice. Por otro lado, si al final estás apurado, podemos recortar el último capítulo.

Referencias

[1] M. Alonso and E. J. Finn. *Fundamental University Physics: Fields and waves.* Addison-Wesley series in physics. Addison-Wesley, 1967.

[2] F. Chamizo. Las ecuaciones de Maxwell en plan fácil. `http://www.uam.es/fernando.chamizo/physics/physics.html`, 2016.

[3] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics. Vol. I.* Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1953.

[4] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[5] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 2: Mainly electromagnetism and matter.* Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1964.

[6] D. V. Galtsov, Iu. V. Grats, and V. C. Zhukovski. *Campos clásicos: enfoque moderno*. Editorial URSS, 2005.

[7] T. A. Garrity. *Electricity and magnetism for mathematicians*. Cambridge University Press, New York, 2015. A guided path from Maxwell's equations to Yang-Mills.

[8] Wikipedia contributors. Poisson's equation — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Poisson%27s_equation&oldid=1103356747`, 2022. [Online; accessed 11-October-2022].

[9] Wikipedia contributors. Triple product — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Triple_product&oldid=1113981368`, 2022. [Online; accessed 12-October-2022].