

Esta hoja y las sucesivas las iré poniendo en <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/tfg.html> donde también hay una lista de la propuesta inicial de los contenidos. La fuente L^AT_EX, en los ficheros AV22hoja*.tex, te será muy útil como plantilla y para poder copiar fórmulas y referencias. Más o menos imita el formato indicado en la guía docente, de todas formas, seguramente es más adecuado, para ahorrar tiempo, que las entregas de cada hoja las incluyas en la plantilla oficial del TFG que puedes descargar de Moodle.

El plan inicial que he reflejado en la web consta de cinco temas:

- Las ecuaciones de Maxwell
- Los potenciales escalar y vectorial
- La formulación relativista
- El principio de mínima acción
- Electromagnetismo y física cuántica

Idealmente corresponderán a cinco hojas, aunque si sobra espacio y ganas podríamos incluir algún otro tema o recortar en caso contrario. No tomes entonces estos puntos al pie de la letra.

Esta hoja, correspondiente al primer punto, tiene bastante de leer y resumir lo leído, hay pocos ejercicios en el sentido habitual.

1) Lee §1, §2, §6 y §7 de [2].

Si quieres, lo puedes complementar con el capítulo 18 de [4]¹ y referencias a otras parte de esa obra, pero no te metas todavía con los potenciales escalar y vector porque los veremos más adelante. También puedes mirar en el artículo de la wikipedia [7], que es muy completo.

2) Busca información acerca de algún experimento en relación con alguna de las ecuaciones. En el original [5, 6] hay algunas descripciones, pero es un poco difícil de leer por la notación. Otra fuente, sesgada hacia la ley de Ampère, es [1]². No hace falta que te extiendas mucho sobre este punto cuando lo escribas, la idea es solo ilustrar que las ecuaciones derivan de experimentos básicos a pesar de su impresionante aspecto.

3) Lee [3] entero. La notación $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}F$ indica la *derivada normal*, que es la derivada direccional en la dirección normal, es decir, $\mathbf{n} \cdot \nabla F$. Si tienes alguna duda con la notación, pregúntame.

Ahora te propongo unos ejercicios para hacer algunos cálculos que te ayuden a completar el razonamiento o a ilustrarlo.

4) Escribe el cálculo que demuestra $\hat{\mathbf{r}}/r^2 = -\nabla r^{-1}$.

¹Hay un versión online en <https://www.feynmanlectures.caltech.edu/>.

²Lo puedes encontrar en <https://www.ifi.unicamp.br/~assis/Amperes-Electrodynamics.pdf>.

5) Muestra [3, (11)]. Como lees allí, esta igualdad del doble rotacional no es tan simple y uno corre el riesgo de perderse con los cálculos. Si se te hace muy cuesta arriba, límitate solo a la primera coordenada. Con la referencia indicada allí, si la quieres mirar, se puede combinar la simetría y el cálculo directo para tener una prueba breve. En caso de que tomes ese camino, escribe la prueba con tus palabras.

6) Demuestra que r^{-1} es una función armónica. Recuerda que esto significa que su laplaciano es nulo.

Veamos ahora que el *linking number* (¿índice de enlace?) lleva a integrales nada triviales. Un comentario al margen es que la definición dada en [3] está en sintonía con la original de Gauss, mientras que actualmente se suele cambiar su signo, es decir, se escribe $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ en vez de $\mathbf{y} - \mathbf{x}$.

7) Considera las circunferencias C y C' parametrizadas, respectivamente por $(\cos t, \sin t, 0)$ y $(0, 1 + \cos u, \sin u)$ con $t, u \in [0, 2\pi]$. Trata de visualizarlas. Haz los cálculos necesarios que muestren que la última integral de [3, (16)] responde a la fórmula:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(t, u) dt du}{(3 - 2g(t, u))^{3/2}} \quad \text{con } g(t, u) = (1 + \cos u) \sin t - \cos u.$$

No se ve una forma clara de calcular esta integral doble, sin embargo, por [3, (15)] sabemos que el resultado es 4π .

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine lo que has aprendido con los ejercicios anteriores. Debe incluir una introducción motivada de las ecuaciones de Maxwell con alguna referencia a algún experimento y terminar con una explicación de por qué la ley de Ampère tal y como él la escribió en su libro es equivalente a la de Biot-Savart y está relacionada con el trozo de las ecuaciones de Maxwell que hoy en día se llama ley de Ampère por medio del *linking number*. La extensión es libre siempre que no superes las 8 páginas con el formato de esta hoja o de la plantilla. Creo que lo adecuado serían unas 6 o 7, lo que, por supuesto, requiere que resumas mucho lo que has leído y los cálculos que has hecho. Huye de las copias literales porque el tribunal te lo podrá penalizar. Tendrás que unificar la notación de ambos documentos. Esta hoja debe dar lugar a un primer capítulo de tu TFG llamado *Las ecuaciones de Maxwell*.

Referencias

- [1] A.K.T. Assis and J.P.M.C. Chaib. *Ampère Electrodynamics*. C. Roy Keys Inc., Montreal, 2015. Analysis of the meaning and evolution of Ampère's force between current elements, together with a complete translation of his masterpiece: Theory of electrodynamic phenomena, uniquely deduced from experience.
- [2] F. Chamizo. Las ecuaciones de Maxwell en plan fácil. http://www.uam.es/fernando_chamizo/physics/physics.html, 2016.
- [3] F. Chamizo and A. Ubis. Around Ampère's law. 2022.
- [4] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 2: Mainly electromagnetism and matter*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1964.
- [5] J. C. Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism. Vol. 1*. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998. With prefaces by W. D. Niven and J. J. Thomson, Reprint of the third (1891) edition.
- [6] J. C. Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism. Vol. 2*. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998. Reprint of the third (1891) edition.
- [7] Wikipedia contributors. Maxwell's equations — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Maxwell%27s_equations&oldid=11110155892, 2022. [Online; accessed 14-September-2022].