

Mi idea inicial era ver algo de ceros excepcionales y la fórmula del número de clases, pasando también por las ecuaciones funcionales quizá tangencialmente. Te adelantaste con las ecuaciones funcionales y ya te dije que estaba planteándome, por razones de espacio, en limitar la fórmula del número de clases a un simple comentario al hilo de los ceros excepcionales. Después pensé que cuadraba muy bien con lo que habías escrito el estudiar las ecuaciones funcionales de unas funciones L dobles, que tienen que ver con algo en lo que estoy trabajando ahora y a lo que lo mismo le puedes sacar rédito en el futuro. De nuevo, me resultaba complicado componer una hoja con una extensión razonable. Al final he tomado una decisión drástica: eliminar también los ceros excepcionales y centrarnos en ecuaciones funcionales y caracteres cuadráticos. Todavía ha quedado más larga de lo que me hubiera gustado. En el caso utópico de que sobrase espacio, se podría añadir algo de lo que he descartado en lo que tengas interés. Ya me dirás tu opinión.

El primer ejercicio consiste simplemente en que organices el material que ya tienes escrito. Aparte de [1], una buena referencia es [3] (el capítulo 9 se ocupa de los caracteres primitivos).

1) Escribe la demostración de la ecuación funcional de $L(s, \chi)$ cuando χ es *primitivo* explicando con claridad en que consiste esta propiedad de los caracteres y por qué se necesita.

Si χ no es primitivo, la función L se puede relacionar con la de su carácter primitivo inducido, pero la ecuación funcional se complica. En cierta forma, deja de ser (casi) independiente del carácter.

2) Para ver que lo has entendido, considera el carácter $\chi(n) = \left(\frac{n}{1575}\right)$ donde los paréntesis indican el *símbolo de Jacobi* [4], explica por qué no es primitivo y halla una ecuación funcional para $L(s, \chi)$.

En el capítulo anterior, ya has visto que los caracteres reales (cuadráticos) son especiales. Lo que aparecía allí es que para ellos la cuestión de decidir $L(1, \chi) \neq 0$ era singular y muy relevante a la hora de probar el teorema de Dirichlet. Solo para tu información, déjame que me explaye un poco en relación con el tema que al final he omitido. No se conoce si podría ocurrir para estos caracteres $L(\beta, \chi) = 0$ con un β real muy cercano a 1. En ese caso, se dice que β es un *cero excepcional* o *de Siegel* y su existencia tendría consecuencias malas en varios temas de teoría analítica de números, por ejemplo se fastidiaría bastante la uniformidad en el teorema de los números primos en progresiones aritméticas [3, Cor. 11.17]. Sorprendentemente, desde el trabajo pionero [2], en los últimos tiempos se ha probado que si existieran ceros excepcionales para muchos caracteres reales se tendrían consecuencias buenas (como la conjetura de los primos gemelos).

Los caracteres reales vienen dados en general por símbolos de Jacobi (o *símbolos de Kronecker*) que, esencialmente, se pueden entender como caracteres en sus dos argumentos. Hay un lío considerable con los números pares (que causa que el símbolo de Kronecker tenga una definición extraña [5]), aquí lo evitaremos con un factor 2 y restringiendo la paridad.

Para $n \in \mathbb{Z}^+$ impar consideramos

$$\chi_n(m) = \left(\frac{2n}{m}\right).$$

Aquí, como en el ejercicio anterior, los paréntesis indican el símbolo de Jacobi y definimos $\chi_n(m) = 0$ para m par (caso no contemplado por la definición del símbolo de Jacobi) en coherencia con el $2n$ que aparece arriba.

Comencemos con una cuestión básica que no es baladí.

3) Demuestra que χ_n es un carácter de Dirichlet y halla su módulo M . **Indicación:** Aplica la *ley de reciprocidad cuadrática* del símbolo de Jacobi [4]. En rigor este símbolo solo se define para m positivo, pero una vez que sabemos $\chi_n(m+M) = \chi_n(m)$ para $m > 0$, se extiende como un carácter M -periódicamente a todo $\mathbb{Z}$.

4) Determina los valores de n para los que χ_n es un carácter primitivo. **Indicación:** Puede resultarte útil tener en mente que si χ y χ' tienen módulos coprimos, $\chi\chi'$ es primitivo si y solo si χ y χ' son primitivos [3, Lem. 9.3].

Un resultado profundo, que de hecho implica la ley de reciprocidad cuadrática, es la siguiente evaluación de una humilde suma finita debida a Gauss [3, Cor. 9.16]:

$$\sum_{n=1}^q e^{2\pi i n^2/q} = \frac{1+i^{-q}}{1-i} \sqrt{q} \quad \text{para cualquier } q \in \mathbb{Z}^+.$$

5) Deduce de esta evaluación que para cualquier primo $p > 2$ se cumple

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=1}^p \left(\frac{n}{p}\right) e^{2\pi i n/p} = \begin{cases} 1 & \text{si } 4 \mid p-1, \\ i & \text{si } 4 \nmid p-1, \end{cases}$$

Indicación: ¿Ves que $\sum_{n=1}^p e^{2\pi i n/p}$ se anula?

6) Prueba que cuando χ_n es primitivo, la suma de Gauss correspondiente es $\tau(\chi_n) = \sqrt{8n}$. **Indicación:** Si χ y χ' tienen módulos coprimos q y q' , se verifica $\tau(\chi\chi') = \tau(\chi)\tau(\chi')\chi(q')\chi'(q)$ [3, Th. 9.7].

7) Para determinar la ecuación funcional de $L(s, \chi_n)$ en el caso primitivo, tenemos que saber el valor de $\chi_n(-1)$, que según lo dicho antes coincide con $\chi_n(M-1)$. Muestra que es igual a 1 y, usando las propiedades de la función Γ [1, §10 (3)], deduce de todo lo anterior la siguiente ecuación funcional asimétrica cuando χ_n es primitivo:

$$L(s, \chi_n) = 2^{3/2-2s} n^{1/2-s} \pi^{s-1} \Gamma(1-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) L(1-s, \chi_n).$$

Todo lo que hemos hecho se resume en particularizar la ecuación funcional de las funciones L al caso de caracteres cuadráticos con la condición de que sean primitivos. A partir de finales de los años 90 del siglo pasado, algunos investigadores se percataron de que al combinar funciones L de caracteres cuadráticos tanto primitivos como no primitivos en una función L “múltiple”, los problemas se cancelaban de alguna manera mágica y dicha función L múltiple adquiriría una ecuación funcional sencilla además de buenas propiedades de extensión meromorfa. Como te dije, esto está relacionado con un trabajo de investigación en el que estoy colaborando. No te asustes que lo que veremos aquí está sobradamente a tu alcance.

Definimos la siguiente función L doble con un factor dependiente de la función ζ , que se introduce solo para que la ecuación final quede más limpia:

$$\mathcal{L}(s, w) = (2^{2s+2w-1} - 1)\zeta(2s + 2w - 1) \sum_{\substack{n=1 \\ 2 \nmid n}}^{\infty} \frac{L(s, \chi_n)}{n^w}.$$

Nota que la suma se podría escribir como una suma doble en $\chi_n(m)m^{-s}n^{-w}$. En ese sentido es una función L doble. Es fácil ver que para $\Re(s), \Re(w) > 1$ hay convergencia. No te preocupes por apurar estas condiciones. En el resto de los ejercicios procede formalmente, sin pensar en qué rangos las manipulaciones convergen (no es difícil ver que todo funciona bien si $\Re(w)$ es grande).

Nuestro propósito es obtener una ecuación funcional “limpia” para $\mathcal{L}(s, w)$, lo cual, insisto, es sorprendente ya que las $L(s, \chi_n)$ no la tienen en general porque infinidad de los χ_n son no primitivos.

8) Demuestra que el sumatorio en la definición de $\mathcal{L}(s, w)$ se puede escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(2n)}{n^w} L(s, \chi_n) \sum_{2 \nmid \ell} \ell^{-2w} \prod_{p|\ell} (1 - \chi_n(p)p^{-s}).$$

Indicación: Cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ tiene una descomposición única $n = q\ell^2$ con q libre de cuadrados (no divisible por ningún cuadrado distinto de 1^2).

Seguramente este ejercicio te cueste más. A ver si sabes resolverlo con la vaga indicación de que uses los productos de Euler de $\zeta(2w)$ y $L(s + 2w, \chi_n)$.

9) Prueba que la expresión del ejercicio anterior es igual a

$$(1 - 2^{-2w})\zeta(2w) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(2n)}{n^w} \frac{L(s, \chi_n)}{L(s + 2w, \chi_n)}.$$

10) Concluye de todo lo anterior que $\mathcal{L}(s, w)$ satisface la ecuación funcional

$$\mathcal{L}(s, w) = \sqrt{2}\pi^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\mathcal{L}(1-s, s+w-1/2).$$

Solo como epílogo y para conectar con el otro tema que he dejado fuera, te cuento una de las motivaciones para preocuparse por la función L doble $\mathcal{L}(s, w)$. Como sabes, el número de clases de las formas cuadráticas de un determinante fijo se relaciona con el valor en $s = 1$ de la función L de un carácter cuadrático. De esta forma, $\mathcal{L}(1, w)$ puede servir para estudiar promedios del número de clases. Incluso sin particularizar en $s = 1$, considerar las propiedades de promedios de funciones L es un problema natural. Por medio de diferentes herramientas analíticas, la variable w da mucha flexibilidad para controlar dichos promedios.

Tarea a entregar. Como en ocasiones anteriores, tienes que escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. El resultado dará lugar a un quinto y último capítulo de tu TFG llamado *Ecuaciones funcionales y caracteres cuadráticos* o la variante que prefieras. Respecto a la extensión, propongo que intentes ajustarla de modo que todo el trabajo no exceda de lo requerido y así no tendremos que quebrarnos la cabeza haciendo una selección.

Referencias

- [1] H. Davenport. *Multiplicative number theory*, volume 74 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2000. Revised and with a preface by H. L. Montgomery.
- [2] D. R. Heath-Brown. Prime twins and Siegel zeros. *Proc. London Math. Soc.* (3), 47(2):193–224, 1983.
- [3] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. *Multiplicative number theory. I. Classical theory*, volume 97 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [4] Wikipedia contributors. Jacobi symbol — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Jacobi_symbol&oldid=1262775442, 2024. [Online; accessed 10-April-2025].
- [5] Wikipedia contributors. Kronecker symbol — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kronecker_symbol&oldid=1258075218, 2024. [Online; accessed 10-April-2025].