En la primera hoja vimos que existen infinitos primos que acaban en 1. En esta hoja vamos a generalizar ese resultado para probar el *Teorema de Dirichlet* que afirma que cualquier progresión aritmética contiene infinitos primos siempre que escapemos del caso tonto en que todos los términos sean múltiplos de un número. Esto es:

Teorema 1 (Dirichlet)**.** *Para $q \in \mathbb{Z}_{>1}$ y $a \in \mathbb{Z}$ con $\mathrm{mcd}(q,a) = 1$ la sucesión $\{qn+a\}_{n=0}^{\infty}$ contiene infinitos primos.*

El problema fundamental será probar que ciertas series no se anulan sin poder echar mano de cálculos numéricos con series explícitas como los de la primera hoja.

Sea G un grupo abeliano finito. Se denota con $\widehat{G}$ al grupo de sus *caracteres*. Estos son los homomorfismos $\chi : G \mapsto \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Por ejemplo, en el grupo cíclico de cuatro elementos $\{e, a, a^2, a^3\}$, con e el elemento neutro, se tiene que $\chi(a^k) = i^k$ define un carácter. Se suele escribir χ_0 para el homomorfismo constante igual a 1. Se prueba que $\widehat{G} \cong G$ y que

$$\sum_{g\in G} \chi(g) = 0 \quad \text{para } \chi \neq \chi_0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{\chi\in\widehat{G}} \chi(g) = 0 \quad \text{para } g \neq e.$$

Evidentemente, para $\chi = \chi_0$ y $g = e$, respectivamente, ambas sumas dan $|G| = |\widehat{G}|$.

Consideremos el grupo $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, los elementos invertibles módulo $q \in \mathbb{Z}_{>1}$, esto es, las clases de los que no tienen factores comunes con q. Como sabes, tiene orden $\varphi(q)$ con φ la función indicatriz de Euler. Se llaman *caracteres de Dirichlet* módulo q a las extensiones a $\mathbb{Z}$ de los caracteres de este grupo asignando a n el valor $\chi(n \bmod q)$ si n y q son coprimos y cero en otro caso. Lo habitual es denotar también con χ a los caracteres de Dirichlet, aunque estrictamente no son caracteres de $\mathbb{Z}$, que es donde están definidos. Nota que son q-periódicos y multiplicativos, $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$. También se conserva la notación χ_0 que ahora significa la función $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ con $\chi_0(n) = 1$ si $\mathrm{mcd}(n,q) = 1$ y $\chi_0(n) = 0$ en otro caso. Las fórmulas anteriores pasan a ser

$$\sum_{a=1}^{q} \chi(a) = \begin{cases} \varphi(q) & \text{si } \chi = \chi_0, \\ 0 & \text{si } \chi \neq \chi_0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \sum_{\chi} \chi(a) = \begin{cases} \varphi(q) & \text{si } a \equiv 1\ (q), \\ 0 & \text{si } a \not\equiv 1\ (q). \end{cases}$$

En el segundo caso la suma es sobre los $\varphi(q)$ caracteres de Dirichlet. A estas fórmulas se les llama *relaciones de ortogonalidad*. El nombre proviene de que si en la primera escribimos $\chi = \chi_1\overline{\chi}_2$ (nota que el conjugado de un carácter es también un carácter) la condición establece la ortogonalidad de los vectores $\{\chi_1(a)\}_{a=1}^{q}$ y $\{\chi_2(a)\}_{a=1}^{q}$ en $\mathbb{C}^q$ para $\chi_1 \neq \chi_2$. Lo mismo ocurre con la segunda con los vectores $\{\chi(a_1)\}_\chi$ y $\{\chi(a_2)\}_\chi$ al escribir $a = a_1\overline{a}_2$ con $\mathrm{mcd}(a_1,q) = \mathrm{mcd}(a_2,q) = 1$, $a_1 \not\equiv a_2\ (q)$ y $a_2\overline{a}_2 \equiv 1\ (q)$. ¿Ves claro que $\chi(\overline{a}_2) = 1/\chi(a_2) = \overline{\chi}(a_2)$?

1) Busca alguna referencia en la red para las relaciones de ortogonalidad (por ejemplo [1, §4], [4, §13.1,2], [7, §18.6]) y escribe una prueba breve para ellas.

Cuando q es impar, los caracteres de Dirichlet restringidos a $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ conforman un grupo isomorfo $C_{\varphi(p_1^{\alpha_1})} \times \cdots \times C_{\varphi(p_n^{\alpha_n})}$ donde $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ es la factorización de n (aquí C_k es el grupo cíclico de orden k) y los caracteres se escriben de manera muy explícita en términos de las llamadas *raíces primitivas*, que seguramente conozcas. Si q es par, las cosas se complican un poco, aunque todavía es posible deducir la estructura del grupo y construir explícitamente los caracteres. Si tienes curiosidad, mira [2, §4, 5], [6, §4.3] o [5, §4.2]. Los caracteres de Dirichlet reales toman valores en $\{-1, 0, 1\}$ y, por tanto, son los que cumplen $\chi^2 = \chi_0$ por eso a veces se les llama *caracteres cuadráticos*. Las funciones χ_j del primer capítulo eran caracteres de Dirichlet cuadráticos módulo 10. El siguiente ejercicio no tiene importancia especial (lo puedes omitir si estás falto de espacio), es solo para que practiques un poco y veas que el caso par no se ajusta al esquema anterior.

2) Construye todos los caracteres de Dirichlet modulo 8, comprobando que son reales, y estudia qué grupo se obtiene al restringirlos a $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$.

Asociado a cada carácter de Dirichlet χ se define la función L de Dirichlet como

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \qquad \text{con} \quad \Re(s) > 1.$$

Para $\chi \neq \chi_0$ esta definición es también válida para $s > 0$ y da lugar a una función regular gracias a que el *criterio de Dirichlet* [8] (que generaliza al de Leibniz) asegura la convergencia de ella y sus derivadas. La serie incluso converge y es holomorfa en $\Re(s) > 0$ (puedes ver una prueba en [4, §14.1]). Si no conoces tal criterio, dalo por supuesto y no te preocupes que en la última hoja veremos con más profundidad estos temas. Si $\chi = \chi_0$, la relación con $\zeta(s)$ del siguiente ejercicio muestra que $(s-1)L(s,\chi_0)$ admite una extensión entera.

Las funciones L de Dirichlet tienen una fórmula producto y otras expresiones paralelas a las obtenidas para ζ.

3) Para $\Re(s) > 1$ prueba las fórmulas

$$L(s,\chi) = \prod_p \left(1 - \chi(p)p^{-s}\right)^{-1} \qquad \text{y} \qquad -\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

En particular, $L(s,\chi_0) = \zeta(s)\prod_{p|q}(1-p^{-s})$.

4) Muestra que para q y a coprimos la siguiente expresión está acotada para $s > 1$

$$\varphi(q) \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv a \ (q)}}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} - \frac{1}{s-1} + \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi}(a)\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}.$$

donde los caracteres son módulo q. Considerando $s \to 1^+$, deduce el Teorema 1 suponiendo que $L(1,\chi) \neq 0$ para $\chi \neq \chi_0$.

5) Demuestra que para $s > 1$

$$L(s,\chi_0)\prod_{\chi\neq\chi_0} L(s,\chi) = \exp\left(\varphi(q)\sum_{\substack{n=2\\ n\equiv 1\ (q)}}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s\log n}\right) \geq 1.$$

Si $L(1,\chi) = 0$ con χ no real, entonces $L(1,\overline{\chi}) = 0$ y el producto tiene un cero doble en $s = 1$, lo que contradice la desigualdad al tomar $s \to 1^+$.

Entonces, tras los dos ejercicios anteriores, todo lo que falta para completar la demostración del Teorema 1 es

$$L(1,\chi) \neq 0 \qquad \text{para} \quad \chi \neq \chi_0 \quad \text{carácter real.} \tag{1}$$

La prueba original de Dirichlet era complicada. En la actualidad se apela a un argumento aritmético ingenioso sobre la positividad de cierta función aritmética junto con un pequeño resultado de variable compleja llamado *Lema de Landau*. Creo que ya has leído lo que escribí sobre este resultado para otro alumno, que voy a aprovechar parcialmente. Nota que el enunciado aquí es distinto, más próximo al habitual [5, Th. 1.7], [3].

Teorema 2 (Lema de Landau)**.** *Sea $f : [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integrable y no negativa tal que $\lim_{x\to\infty} f(x)x^{-1-\varepsilon} = 0$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Si la trasformada integral*

$$L_f(s) = \int_1^\infty \frac{f(x)}{x^{s+1}}\,dx$$

se extiende a una función holomorfa en algún abierto que contiene a un intervalo $(\sigma, 1]$ con $0 < \sigma < 1$, entonces la integral converge en $\Re(s) > \sigma$ y es holomorfa allí.

El resultado contrasta con lo visto en la demostración del teorema de los números primos de la hoja anterior en la que hubo que hacer un argumento complicado porque la extensión holomorfa no implicaba la convergencia. La nueva hipótesis clave es la positividad. Descompongo la prueba en dos ejercicios, supongo que el primero te costará más. La condición sobre el límite asegura que la integral converge en el semiplano $\Re(s) > 1$. Definimos σ' como la abcisa que determina el primer semiplano en que $L_f(s)$ deja de converger ($\sigma' = -\infty$, la convergencia en todo $\mathbb{C}$, es admisible pero sería trivial), esto es,

$$\sigma' = \text{ínf}\left\{\delta > \sigma \,:\, L_f(s) \text{ converge para } \Re(s) > \delta\right\}.$$

El teorema se sigue si $\sigma' > \sigma$ lleva a una contradicción. La holomorfía se puede obtener como consecuencia del teorema de Morera. En realidad no la usaremos para nada.

6) Demuestra que $\lim_{N\to\infty}\int_1^N x^{-1-\delta}f(x)\,dx=\infty$ para todo $\delta<\sigma'$. Indicación: Decir que una integral impropia no converge (en sentido Riemann) es lo mismo que decir que $\int_N^M$ no tiende a cero cuando $N,M\to\infty$.

7) Sean σ_+ y σ_- con $\sigma<\sigma_-<\sigma'<\sigma_+$ suficientemente cercanos para que σ_- pertenezca a un disco centrado en σ_+ en el que $L_f(s)$ tiene extensión holomorfa, llamémosla F. Se cumple

$$F(\sigma_-)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_f^{(n)}(\sigma_+)}{n!}(\sigma_--\sigma_+)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sigma_+-\sigma_-)^n}{n!}\int_1^{\infty}\frac{f(x)(\log x)^n}{x^{1+\sigma_+}}\,dx.$$

Explica por qué restringiendo la integral a $[1,N]$ se sigue que $\int_1^N x^{-1-\sigma_-}f(x)\,dx$ está uniformemente acotada por $|F(\sigma_-)|$, contradiciendo el ejercicio anterior.

Para la prueba de (1) usaremos una función aritmética y su suma, concretamente,

$$c(n)=\sum_{d|n}\chi(d)\qquad\text{y}\qquad f(x)=\sum_{1\le n\le x}c(n).$$

8) Explica por qué c es una función *multiplicativa*, esto es, para $m,n\in\mathbb{Z}^+$ coprimos se cumple $c(mn)=c(m)c(n)$.

9) Para $\varepsilon>0$ y $N\in\mathbb{Z}_{>1}$ demuestra la desigualdad

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{d|n}1\le N^{\varepsilon/2}\prod_{p\le N}\left(1-p^{-1-\varepsilon/2}\right)^{-2}$$

y deduce que f satisface la propiedad del límite del Teorema 2. Indicación: Nota que $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\dots$ y que $\sum_{d|p^\alpha}1=\alpha+1$. Por si tienes curiosidad, este es un ejemplo del llamado *truco de Rankin* (*Rankin trick*) que permite acotar sumas de funciones multiplicativas.

Lo siguiente debiera resultarte sencillo con lo que has hecho hasta ahora.

10) Con la notación como en el Teorema 2, muestra que $sL_f(s)=\zeta(s)L(s,\chi)$ y, suponiendo $f\ge 0$, deduce de él que la integral $L_f(1/2)$ converge si $L(1,\chi)=0$. Puedes usar que $L(s,\chi)$ es holomorfa en $\Re(s)>0$ como se ha dicho antes (ya lo veremos en la siguiente hoja si no lo tienes claro).

Ahora viene el golpe de gracia. Un argumento aritmético muestra que realmente $f\ge 0$, pero que es demasiado grande como para que $L_f(1/2)$ converja. Así, del ejercicio anterior se sigue (1). A ver si consigues resolverlo solo con la breve indicación que te doy.

11) Demuestra que $c(n) \geq 0$, $c(n^2) \geq 1$. Deduce que $f(n^2) \geq n$ y que $L_f(1/2)$ no converge. Indicación: Recuerda que c es multiplicativa, por tanto está determinada por su acción en las potencias de primos.

Tarea a entregar. Como en ocasiones anteriores, tienes que escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. Mi recomendación es que no pases de las siete páginas y que no te entretengas demasiado con la definición de los caracteres pues el protagonista es el teorema de Dirichlet. El resultado dará lugar a un cuarto capítulo de tu TFG llamado *Las funciones L y el teorema de Dirichlet* o la variante que prefieras.

Referencias

[1] Conrad, K. Characters of finite abelian groups. `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/charthy.pdf`, 2023.

[2] H. Davenport. *Multiplicative number theory*, volume 74 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2000. Revised and with a preface by H. L. Montgomery.

[3] W. J. Ellison. *Les nombres premiers*. Hermann, Paris, 1975. En collaboration avec M. Mendès France.

[4] Liu, S.-C. Lecture Notes in Analytic Number Theory. `https://bpb-us-w2.wpmucdn.com/faculty.umaine.edu/dist/1/19/files/2022/08/analyticnumbertheory.pdf`, 2019.

[5] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. *Multiplicative number theory. I. Classical theory*, volume 97 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[6] Strömbergsson, A. Analytic Number Theory – Lecture Notes based on Davenport's book. `https://www2.math.uu.se/~ast10761/analtalt23/lecture_notes.pdf`, 2023.

[7] Sutherland, A. Dirichlet L-functions and primes in arithmetic progressions. `https://math.mit.edu/classes/18.785/2021fa/lectures.html`, 2016. MIT 18.875-Number Theory I.

[8] Wikipedia contributors. Dirichlet's test — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Dirichlet%27s_test&oldid=1253210647`, 2024. [Online; accessed 5-January-2025].