Esta hoja está dedicada a probar uno de los resultados más famosos acerca de la distribución de los primos, el *teorema de los números primos* que da la asintótica de su función contadora denotada habitualmente con $\pi(x)$. Concretamente:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1 \qquad \text{donde} \quad \pi(x) = \#\{p \le x\}. \tag{1}$$

Este límite es, en realidad, un poco engañoso, pues la convergencia a 1 es lentísima. Una formulación equivalente es

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1 \qquad \text{donde} \quad \vartheta(x) = \sum_{p\le x} \log p.$$

Esta convergencia es mucho más rápida. Intuitivamente sugiere que la probabilidad de que un entero positivo de tamaño N sea primo está bien aproximada por $1/\log N$ (porque necesitamos introducir el peso $\log p$ para que contribuya como una unidad), lo cual hace pensar (y se puede probar) que la aproximación buena de $\pi(x)$ es $\operatorname{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$, como ya observó experimentalmente Gauss. Por la regla de L'Hôpital, $(\log x)\operatorname{Li}(x)/x$ tiende a 1 y así $\pi(x)/\operatorname{Li}(x) \to 1$, que es lo que tiene buena convergencia, equivale a (1).

1) Escribe unas pocas líneas describiendo brevemente la historia del teorema de los números primos e incluye algún dato numérico acerca de la aproximación de $\pi(x)$ por $x/\log x$ y por $\operatorname{Li}(x)$. Como referencias puedes usar [5] o [1] o la fuente que prefieras. Si tienes interés por la historia de las pruebas elementales, da un vistazo a [2] (que está disponible en la red).

Aquí seguiremos una prueba de 1980 debida a Newman [4] que, como indica [5], se ha hecho muy famosa por su brevedad (incrementada tras [6]). Por si tienes curiosidad, en [3] hay otra prueba más original y también breve, su inconveniente es que no da el teorema de los números primos con el enunciado convencional (1) sino con otro más feo, bien conocido por los expertos, que involucra la función de Möbius y probar la equivalencia lleva algún trabajo.

Hay bastantes detalles en esta hoja, por ello puede ser difícil capturar la idea general. Te la explico en unas líneas. Con lo que conoces de la hoja anterior y sabiendo que ζ no tiene ceros en la línea $\Re(s) = 1$, lo cual resulta ser crucial, se puede probar sin mucho esfuerzo que $\int_1^\infty \big(\vartheta(x) - x\big)x^{-s-1}\,dx$ tiene una extensión holomorfa más allá de $\Re(s) \ge 1$. Por cierto, es un misterio relacionado con la famosa *hipótesis de Riemann* saber hasta dónde. Uno está tentado a concluir tomando $s = 1$ que $\int_1^\infty \big(\vartheta(x) - x\big)x^{-2}\,dx$ existe. Este es el punto difícil, porque no está nada claro que la existencia de una extensión holomorfa permita sustituir un valor al borde de la convergencia. Piensa en $1 - z + z^2 - z^3 + \dots$ que se extiende a $(1+z)^{-1}$ en $\mathbb{C} - \{-1\}$, pero no es lícito tomar en la serie $z = 1$, que está en la frontera del círculo de convergencia. Una vez que uno prueba la existencia de la integral para $s = 1$, deducir (1) responde a más o menos una rutina en análisis.

Comenzamos con un ingrediente analítico fundamental para la prueba de (1) y es el hecho de que ζ no tiene ceros en $\Re(s) = 1$. Aunque no lo veremos aquí, se puede probar que un solo cero en esa línea implicaría que $\pi(x)(\log x)/x - 1$ se comporta como una función oscilatoria del tipo $a\,\mathrm{sen}(b \log x)$ y por tanto el límite no existiría.

2) Para $\sigma > 1$ y $t_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ prueba

$$(1-\sigma)\sum_{k=-2}^{2}\binom{4}{2+k}\frac{\zeta'(\sigma+ikt_0)}{\zeta(\sigma+ikt_0)} = (\sigma-1)\sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\big(n^{it_0/2}+n^{-it_0/2}\big)^4 \ge 0.$$

Tomando límites $\sigma \to 1^+$ en esta desigualdad, deduce que si ζ tiene un cero de orden m en $1 + it_0$ entonces $\binom{4}{2} - m\binom{4}{3} - m\binom{4}{1} \ge 0$, lo cual es imposible para $m \ge 1$.

El siguiente punto es la extensión de la integral. Para aprovechar lo que sabes de la hoja anterior, necesitas la fórmula del siguiente ejercicio.

3) Demuestra que para la función F del final de la hoja anterior se cumple

$$F(s) = s\int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}}\,dx \qquad \text{en} \quad \Re(s) > 1.$$

Es parte del problema justificar la convergencia de la integral en la región indicada.

4) Explica brevemente por qué los dos ejercicios anteriores y lo que sabes de la extensión meromorfa de F en la pasada hoja, implican que existe un abierto $\mathcal{U} \supset \{\Re(s) \ge 1\}$ tal que

$$G(s) = \int_1^\infty \big(\vartheta(x) - x\big)\frac{dx}{x^{s+1}} \quad \text{tiene una extensión holomorfa a } \mathcal{U}. \tag{2}$$

Lo más complicado será probar que la extensión anterior implica

$$\mathcal{I}(a,b) = \int_a^b \big(\vartheta(x) - x\big)\frac{dx}{x^2} \to 0 \qquad \text{cuando} \quad b > a \to \infty. \tag{3}$$

Si recuerdas el cálculo de primero, esto equivale a decir que la integral impropia $\int_1^\infty$ converge.

El esquema de la prueba de (1) antes descrito es, entonces,

$$\boxed{(2) \;\Rightarrow\; (3) \;\Rightarrow\; (1)}$$

Los cuatro ejercicios siguientes muestran la segunda implicación por contradicción, es decir, veremos que si no se cumple (1) entonces (3) no puede darse. Es en esa implicación que pasa de $\vartheta(x)$ a $\pi(x)$ donde se está perdiendo la rapidez de convergencia porque la relación que se establece entre ambas funciones proviene de unas desigualdades burdas.

Si (1) fuera falso, o bien $\limsup > 1$ o bien $\liminf < 1$ (o ambas cosas). Probaremos con detalle por qué lo primero contradice (3). Para el límite inferior el argumento es similar, aunque más sencillo. Pongo unos comentarios al final.

Si el límite superior es mayor que 1, por definición, existe una constante $L > 1$ y una sucesión positiva $x_n \to \infty$ tal que $\pi(x_n)\log x_n > Lx_n$.

5) Sea $\beta = \frac{L+1}{2L}$. Justifica para $x \ge x_n$ las desigualdades

$$\vartheta(x) \ge \beta\big(\pi(x_n) - \pi(x_n^\beta)\big)\log x_n \ge \frac{L+1}{2}x_n - \beta x_n^\beta \log x_n.$$

6) Deduce

$$\mathcal{I}(x_n, Lx_n) \ge \frac{L^2-1}{2L} - \log L + c_n \qquad \text{con} \quad c_n \to 0.$$

7) Demuestra que $\frac{L^2-1}{2L} - \log L$ es una constante estrictamente positiva y concluye que (3) no puede darse, llegando a una contradicción. Indicación: Estudia el crecimiento de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{2x} - \log x$ en $[1,\infty)$.

El argumento para deducir que el límite inferior no puede ser menor que un $\ell < 1$ es algo más sencillo porque en lugar de las desigualdades iniciales, solo se necesita $\vartheta(x) \le \pi(x_n)\log x_n$ para $x \le x_n$, que es trivial. Con ello se obtiene $\mathcal{I}(\ell x_n, x_n) \le 1 - \ell + \log \ell$ que es una constante estrictamente negativa.

8) Escribe alguna línea para tu trabajo sobre el caso del límite inferior sin poner todos los detalles.

Para completar la prueba de (1), nos falta la implicación (2) $\Rightarrow$ (3) a la que dedicaremos el resto de la hoja. Dicha implicación se deduce de una aplicación de la fórmula integral de Cauchy que requiere varias acotaciones. No he incluido indicaciones en los ejercicios y algunos pueden suponer un pequeño reto. Si necesitas ayuda, pregunta. En cierto paso se necesita que la función $\vartheta(x)/x$ esté acotada. El siguiente ejercicio consigue este propósito con una constante explícita (cuyo valor, $4\log 2$, es indiferente para lo que sigue).

9) Demuestra $\vartheta(x)/x \le 4\log 2$ para $x > 1$ escogiendo $k \in \mathbb{Z}^+$ con $x \in (2^{k-1}, 2^k]$ y justificando las desigualdades:

$$\vartheta(x) \le \sum_{j=1}^{k}\big(\vartheta(2^j) - \vartheta(2^{j-1})\big) \le \sum_{j=1}^{k}\log\binom{2^j}{2^{j-1}} \le \sum_{j=1}^{k}\log 2^{2^j} \le 4x\log 2.$$

Consideremos la región $D = \{s \in \mathbb{C} : |s| \le R,\ \Re(s) > -\delta\}$ con $R > 1 > \delta > 0$. Es un hecho sencillo de topología general que para cualquier R siempre podemos escoger un δ tal que $\{s+1 : s \in D\} \subset \mathcal{U}$ para el $\mathcal{U}$ de (2). Si no lo ves claro, piénsalo. Definamos ahora algunas funciones. Dado $c > 1$ sea G_c definida igual que G en (2), pero limitando la integral al intervalo $[1, c]$. Sean también

$$h_c(s) = c^s\Big(1 + \frac{s^2}{R^2}\Big), \qquad B_c(s) = G_c(s+1)h_c(s) \qquad \text{y} \qquad A_c(s) = B_c(s) - G(s+1)h_c(s).$$

Por (2) todas estas funciones son holomorfas en un abierto que contiene a D. De hecho, h_c, G_c y B_c son enteras. Realmente, (2) solo se utiliza para que la fórmula del siguiente ejercicio (que debería resultarte fácil) tenga sentido.

10) Explica por qué

$$\mathcal{I}(a,b) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\big(A_b(s) - A_a(s)\big)\,\frac{ds}{s}.$$

Descompongamos la frontera como $\partial D = C_1 \sqcup C_2$ con C_1 la semicircunferencia derecha $\{|s| = R,\ \Re(s) \ge 0\}$ y C_2 el resto.

11) Teniendo en cuenta que $h_c(s)$ tiende exponencialmente a cero cuando $c \to \infty$ para cada $s \in C_2$, explica con todo rigor que (3) se sigue si se prueba que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $R > 1$ tal que

$$J_1 = \Big|\int_{C_1}\big(A_b(s) - A_a(s)\big)\,\frac{ds}{s}\Big| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad J_2 = \Big|\int_{C_2}\big(B_b(s) - B_a(s)\big)\,\frac{ds}{s}\Big| < \varepsilon.$$

12) Muestra que para $s \in C_1$ con $\Re(s) = \sigma$ se tiene $|h_c(s)| = 2R^{-1}\sigma c^{\sigma}$ y $|G_c(s+1) - G(s+1)| \le K\sigma^{-1}c^{-\sigma}$ para cierta constante K y concluye que J_1 es arbitrariamente pequeño cuando R crece.

13) Sea C_3 la curva simétrica de C_1, esto es, $C_3 = \{|s| = R, \Re(s) < 0\}$. Explica por qué $J_2 = \big|\int_{C_3}\big|$ y aplica un argumento similar al del ejercicio anterior para obtener el mismo resultado.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. No te pongo límites a la extensión, pero te recomiendo que minimices los detalles para no extenderte demasiado. Acerca de la historia, basta con escribir unas líneas. El resultado debe dar lugar a un tercer capítulo de tu TFG llamado *La distribución de los números primos* o la variante que prefieras.

Referencias

[1] H. Davenport. *Multiplicative number theory*, volume 74 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2000. Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery.

[2] D. Goldfeld. The elementary proof of the prime number theorem: an historical perspective. In *Number theory (New York, 2003)*, pages 179–192. Springer, New York, 2004.

[3] H. Iwaniec. *Lectures on the Riemann Zeta Function.* University Lecture Series. American Mathematical Society, 2014.

[4] D. J. Newman. *Analytic number theory*, volume 177 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[5] Wikipedia contributors. Prime number theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Prime_number_theorem&oldid=1248883375`, 2024. [Online; accessed 9-October-2024].

[6] D. Zagier. Newman's short proof of the prime number theorem. *Amer. Math. Monthly*, 104(8):705–708, 1997.