En esta hoja vamos a ver las soluciones de la ecuación de Dirac (siempre entendida para una partícula libre). Para ello vamos a seguir una estrategia distinta de la de hojas anteriores. Esencialmente lo que te propongo es que veas dos vídeos breves, de unos 10 minutos entre ambos, y que transcribas en tu trabajo lo que has aprendido de ellos. El primero trata del caso *rest frame*, que supongo que en español habría que traducir como "sistema en reposo" o "sistema centro de masas". Este vídeo está en:

`https://www.youtube.com/watch?v=Le9Vcn2dS-E`

La solución "general" se construye a partir de la solución en el sistema en reposo y se explica en el vídeo:

`https://www.youtube.com/watch?v=uVrTT2_9dhs`

Ambos vídeos pertenecen a *Pretty Much Physics*, un canal de *youtube*, que a mí me parece muy bueno, en el que se explican diferentes temas de física universitaria con vídeos cortos y sin escatimar con las matemáticas.

Como ya he sugerido, el único ejercicio de esta hoja es el siguiente pero antes de hacerlo debes seguir leyendo lo que escribo a continuación porque si no, dudo que no te pierdas.

1) Mira los vídeos anteriores, por el orden indicado, y escribe su contenido explicando con todo detalle la notación y los pasos que no consideres obvios para un estudiante de matemáticas.

Para facilitarte el trabajo, te explicaré a continuación el convenio de sumación empleado habitualmente en física particularizado al contexto de la relatividad especial, que es el que nos interesa. También te aclararé algunos puntos concretos de los vídeos.

En breve, el *convenio de sumación de Einstein* consiste en que cuando un índice aparece repetido como subíndice y como superíndice, se sobreentiende una suma. En relatividad estamos normalmente con cuatro coordenadas pero ocasionalmente se usan tres. Para distinguir, se suelen usar índices griegos en el primer caso (tomando valores entre 0 y 3) y latinos en el segundo (tomando valores entre 1 y 3). Por ejemplo, en los vídeos aparecen $\gamma^\mu\partial_\mu$ y $k_\mu x^\mu$, que significan respectivamente $\sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu\partial_\mu$ y $\sum_{\mu=0}^3 k_\mu x^\mu$. Ahora mismo no sé si aparecen ejemplos puros del segundo caso pero sí se habla de σ_i. Ahí se sobreentiende que $i = 1, 2, 3$ y $a^i\sigma_i$ significa $\sum_{i=1}^3 a^i\sigma_i$. En un momento dado se introduce σ_μ (en realidad σ^μ). Eso indica que se añade una nueva matriz σ_0 (definida como la identidad en el segundo vídeo).

Las coordenadas de los cuadrivectores normalmente se ponen con superíndices. Así, como mencioné en la hoja anterior, un físico escribiría $(t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ y normalmente lo llamaría x mientras que $\vec{x}$ indica las tres últimas coordenadas[1]. Si tenemos otro cuadrivector

[1] Eso explica por ejemplo el $k^\mu = (k^0, \vec{0})$ del primer vídeo.

$y = (y^\nu)$, hay un producto escalar[2] asociado a la matriz $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ usada para definir el grupo de Lorentz. Con ello,

$$x \cdot y = x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3.$$

En los vídeos se considera un cuadrivector k que es el cuadrimomento pero sus coordenadas tienen subíndices. Las coordenadas con subíndices y superíndices están relacionadas mediante $k_\mu = \eta_{\mu\nu} k^\nu$, donde se está usando el convenio de sumación, es decir, $k_0 = k^0$, $k_1 = -k^1$, $k_2 = -k^2$, $k_3 = -k^3$. De este modo $k \cdot x$, que es $k^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu$, también se puede escribir como $k_\nu x^\nu$.

En la hoja anterior ya habíamos visto la notación de Feynman $\not{\partial} = \sum_{\mu=0}^{3} \gamma^\mu \partial_\mu$. Pues bien, lo mismo se aplica a otras cantidades[3]. En los vídeos se habla de $\not{k}$ que, en analogía con lo anterior, significa $\sum_{\mu=0}^{3} \gamma^\mu k_\mu$.

Vamos ahora con cosas un poco más específicas que te pueden hacer dudar. Indico en cada caso el número de vídeo con I o II y el tiempo aproximado en el que aparece el punto conflictivo.

I, 0:15. Como ves, se utiliza la ecuación de Dirac en unidades naturales $\hbar = 1$. Tú debes restablecer la $\hbar$ en lo que escribas para ser coherente con lo de la hoja anterior.

I, 0:29. Este 1 grande es la matriz identidad. A lo largo de los vídeos se supone varias veces que los escalares van acompañados de matrices identidad cuando se suman con matrices. Esto es, $A + x$ con A una matriz cuadrada y x un escalar, significa $A + xI$.

I, 0:35. Esto del *plane wave ansatz* no es una restricción importante. Para la ecuación de Schrödinger con $V = 0$, el análogo sería $e^{ik_\mu x^\mu/\hbar} = e^{i(Et - p_1 x - p_2 y - p_3 z)/\hbar}$. Una vez que uno halla esta solución, con Fourier podría expresar cualquier otra solución mediante

$$\Psi(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} a(\vec{p}) e^{i(Et - p_1 x - p_2 y - p_3 z)/\hbar} d\vec{p}$$

donde la función a se ajusta para que en $t = 0$ salga lo que queramos. En resumen, basta preocuparse de las soluciones en ondas planas porque el análisis de Fourier asegura que todas las ondas son superposición de ellas.

I, 1:30. En sintonía con lo del párrafo anterior, la idea es que $k = (k^\mu) = (E, \vec{p})$. Si quieres, esta es la definición de energía E y momento $\vec{p}$. El significado es adecuado si somos coherentes con la motivación de la ecuación de Klein-Gordon y lo visto con la ecuación de Schrödinger. El autor del vídeo prefiere no decirlo claramente y guardar cierta distancia. La mayor parte de

[2] En realidad no es definido positivo y un matemático purista diría pseudoproducto escalar.

[3] Si quieres hacer esta barra con comodidad en LaTeX, te recomiendo que cargues en la cabecera el paquete `slashed`. Con él podrás escribir `\slashed{\partial}` y `\slashed{k}` para obtener $\not{\partial}$ y $\not{k}$. Si tienes dudas, mira la fuente de este documento.

los libros ponen sin remilgos $e^{\pm ip\cdot x}$ con p el cuadrimomento. Nota que en lo que escribas, con las unidades no naturales, Ψ_1 y Ψ_2 son $e^{-ik\cdot x/\hbar}$ y $e^{+ik\cdot x/\hbar}$.

I, 2:13. En el sistema de referencia en reposo, $\vec{p}=0$ y $E=\sqrt{m^2+\|\vec{p}\|^2}=m$, por eso se cumple que k, que es $(k^\mu)=(E,\vec{p})$, coincide con $(m,\vec{0})$.

I, 3:28. Fíjate que se usa 0 con cierta libertad, tanto para el número cero como para el vector nulo. Esta última interpretación ya aparecía en el propio enunciado de la ecuación de Dirac.

I, 3:59. No te preocupes por ahora de las consideraciones con respecto al espín. Ya veremos algo de esto. Solo ten en mente que en un momento dado se vio que era necesario considerar funciones de ondas con dos coordenadas para representar ciertos campos magnéticos de partículas elementales.

I, 5:06. Tontería mía: Weyl se pronuncia algo así como *Vail*, en vez del *Guail* que se empeña en decir el autor del vídeo.

I, 6:06. Esta δ es la de Kronecker, $\delta_{rs}=1$ si $r=s$ y es nula en otro caso.

II, 0:27. Como ves, a menudo en física se omite el punto del producto escalar. Este kx es lo que era antes $k\cdot x$.

II, 1:15. Esto de que $\not{k}\not{k}=k^2$ que dice como si tal cosa, seguro que te va costar un poco justificarlo. En primer lugar el sentido que tiene k^2, un vector por si mismo, es $k\cdot k$, que si recuerdas lo que dije al principio, es $(k^0)^2-(k^1)^2-(k^2)^2-(k^3)^2$. Recuerda también que los escalares se identificaban con ellos mismos por la matriz identidad. Respecto a la identidad propiamente dicha, la clave está en que se cumple $\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2\eta^{\mu\nu}I$ donde $\eta^{\mu\nu}$ es lo mismo que $\eta_{\mu\nu}$. Si usas esta igualdad, debes probarla a partir de lo que sabías de los α_j usados en la primera formulación de la ecuación de Dirac. En [Wik20b] hay varias identidades para las matrices γ^μ.

II, 1:16. Según lo que acabo de explicarte, $k^2=m^2$ significa $k\cdot k=m^2$. Si lo piensas, veras que esto es equivalente a la fórmula $E^2=m^2+\|\vec{p}\|^2$ que conoces.

II, 1:48. Estas σ^i son las mismas matrices de Pauli σ_i que ya conoces.

II, 1:54. Aquí aparece otra notación chocante para un matemático pero coherente con todo lo visto. El "vector" $\vec{\sigma}$ tiene tres coordenadas que son las matrices σ^1, σ^2 y σ^3, por tanto el producto escalar $\vec{\sigma}\cdot\vec{k}$ es $\sigma^1k^1+\sigma^2k^2+\sigma^3k^3$.

II, 2:03. Recuerda que $k=(k^\mu)=(E,\vec{p})$, así que $\vec{k}=\vec{p}$. Con "velocidades pequeñas" quiere decir que el momento es pequeño en comparación con la energía y como la energía en reposo es m, de ahí sale $|\vec{k}|\ll m$. La flecha no es un límite estrictamente, ya que sale una constante de proporcionalidad pero desaparecería normalizando.

II, 2:20. Esta barra sobre σ^μ no tiene nada que ver con conjugados ni con $\vec{\sigma}$. Tómalo como una definición, como si prefieres escribir τ en lugar de $(\overline{\sigma}^\mu)$. Es un "vector matricial" cuyas coordenadas son I, $-\sigma^1$, $-\sigma^2$ y $-\sigma^3$.

II, 2:57. La digresión que empieza ahora respecto a la forma alternativa de la solución no es importante en tu trabajo pero me gustaría que la siguieras. Por $\sqrt{k \cdot \sigma}$ debes entender una matriz 2×2 que elevada al cuadrado da $k \cdot \sigma$.

Termino mencionando algunas referencias por si quieres consultarlas. En el capítulo 36 de [LB14] se aborda el tema de las soluciones de la ecuación de Dirac. En el capítulo 4 de [Kla13] prácticamente solo se da el resultado pero de una manera tan explícita que puede ser de utilidad.

Hay también material en internet donde se muestra la solución de la ecuación de Dirac en la línea de los vídeos antes mencionados. En la wikipedia el caso de la representación de Dirac está en [Wik20a] pero nada detallado. Buscando un poco al azar he encontrado en la página de un profesor de física de la universidad de Warwick llamado S. Boyd:

`https://warwick.ac.uk/fac/sci/physics/staff/academic/boyd/stuff/dirac.pdf`

y también:

`https://warwick.ac.uk/fac/sci/physics/staff/academic/boyd/stuff/neutrinolectures/`

Tarea a entregar. La tarea a entregar ya está clara con el único ejercicio. No te pongo limitaciones con respecto a la extensión. Es muy importante que esté todo suficientemente explicado para alguien no familiarizado con la notación física. Tu trabajo debe estar autocontenido y por tanto para entender lo que escribas aquí, debe bastar lo de las secciones anteriores.

Referencias

[Kla13] R. D. Klauber. *Student Friendly Quantum Field Theory: Basic Principles and Quantum Electrodynamics*. Sandtrove Press, 2013.

[LB14] T. Lancaster and S. J. Blundell. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. Oxford University Press, 2014.

[Wik20a] Wikipedia contributors. Dirac spinor — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accessed 28-December-2020].

[Wik20b] Wikipedia contributors. Gamma matrices — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accessed 29-December-2020].