Modificando un poco el programa inicial (lo he corregido en la web), en esta hoja veremos la motivación de la ecuación de Klein-Gordon que fue una especie de versión fallida de ecuación de Schrödinger relativista para partículas libres. Entender esta motivación allanará el camino hacia la ecuación de Dirac. Excepto cuando se diga lo contrario, trabajaremos con unidades relativistas.

Dos leyes fundamentales en la mecánica de Newton son la conservación del momento y la de la energía, las cuales permiten resolver problemas de choques de objetos sobre los que seguramente hayas pasado alguna vez. En unidades relativistas el momento y la energía de la mecánica de Newton tienen las mismas unidades (de masa).

**1)** Compruébalo.

Redundando en esta coincidencia, en la mecánica relativista lo que se conserva es el *cuadrimomento* o 4-*momento* $\mathbf{p} = (E, \vec{p})$ donde $E$ es la energía relativista y $\vec{p}$ es el momento relativista. Esta es una ley básica en el sentido de que estrictamente no se deduce de nada pero por supuesto tiene una motivación. La clave es que la ley de conservación habitual llevaría a situaciones contradictorias para observadores en movimiento. Si tienes curiosidad mira [FLS63, 16-4,17-5]. Aquí no veremos fórmulas para $E$ y $\vec{p}$, incluso en el caso más sencillo, sino que tomaremos como punto de partida que verdaderamente $\mathbf{p}$ se transforma como un vector al cambiar de observador. Esto es, si dos observadores $O$ y $O'$ están relacionados por una transformación de Lorentz $\Lambda \in \mathcal{L}$ entonces los cuadrimomentos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{p}'$ de una partícula que miden ambos están relacionados mediante

$$\Lambda \mathbf{p} = \mathbf{p}' \tag{1}$$

donde, como es habitual en álgebra lineal, pensamos que los vectores son vectores columna. Siendo muy rigurosos habríamos escrito $\mathbf{p} = (E, \vec{p}^{\,t})^t$.

Schrödinger se dio cuenta de que la mecánica cuántica era ya en parte relativista e intentó sin éxito que su ecuación lo fuera. Ilustremos este punto:

**2)** Recuerda que $\Psi = e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)/\hbar}$ son las ondas puras que corresponden a momento $\vec{p}$ y energía $E$. Usando (1) y que $\eta = \Lambda^t \eta \Lambda$ para $\Lambda \in \mathcal{L}$, prueba que si $\vec{p}$ y $E$ son momentos y energías relativistas, $\Psi$ es invariante para observadores inerciales $O$ y $O'$. Esto es, da lo mismo para los relacionados por transformaciones de Lorentz

$$\Lambda \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ \vec{x}' \end{pmatrix}.$$

Supongamos que $O$ y $O'$ observan una partícula que sostiene $O'$. Para $O$ se mueve con velocidad constante mientras que para $O'$ está en reposo, lo que corresponde a $\vec{p}' = \vec{0}$. Así tenemos

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} E_0 \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

donde $E_0$ es la "energía en reposo" de la partícula.

**3)** Usando (1), deduce la fórmula $E^2 = E_0^2 + \|\vec{p}\|^2$. *Indicación*: Calcula $(\mathbf{p}')^t \eta \mathbf{p}'$.

En la mecánica de Newton la energía en reposo es arbitraria porque son los incrementos de energía los que producen trabajo. Sin embargo Einstein probó $E_0 = m$, la famosa $E = mc^2$ en unidades no relativistas, en el célebre y brevísimo artículo[1] [Ein05]. Con ello y el ejercicio anterior se llega a la fórmula que relaciona energía y momento relativistas y que es la base para la ecuación de Dirac:

$$E^2 = m^2 + \|\vec{p}\|^2. \tag{2}$$

¿De dónde sacó $E_0 = m$? Pues utilizó la relación de Planck $E = h\nu$ de manera ingeniosa en un experimento mental. Aquí lo vamos a obtener de una manera muy parecida pero con una referencia a funciones de ondas que él no hizo. Suponemos con Einstein que una masa $m$ en reposo para un observador $O'$ se desintegra por alguna misteriosa razón en dos fotones que viajan en direcciones opuestas del eje $X$ cada uno con la mitad de la energía $E_0$ que tenía la masa en reposo. Si consideramos estos fotones más bien como rayos de luz con velocidades 1, el que va a la derecha, y $-1$, el que va a la izquierda (recuerda que la velocidad de la luz es 1 en unidades relativistas), deberíamos asignarles respectivamente las ondas

$$\Psi_+ = e^{iE_0(x'-t')/(2\hbar)} \qquad \text{y} \qquad \Psi_- = e^{-iE_0(x'+t')/(2\hbar)}.$$

**4)** Explica esto con tus palabras. Si no sabes ni por dónde empezar, da un vistazo al caso unidimensional de la ecuación de ondas mencionado en [Cha16, §3].

El observador $O$ por su parte, antes de la desintegración, verá la partícula en movimiento uniforme por el eje $X$ y entonces medirá otra energía de la partícula que podemos pensar como $E = E_0 + K$ con $K$ una energía cinética, es decir, añadida por estar en movimiento. Por otro lado, después de la desintegración observará $\Psi_\pm$ con $(t, x)$ en lugar de con $(t', x')$, relacionadas por medio de las transformaciones de Lorentz de la hoja anterior.

**5)** Escribe las fórmulas para $\Psi_\pm$ en función de $(t, x)$ y la velocidad relativa $v$.

Para $O'$ antes de la desintegración la energía era $E_0$ y después de ella tenemos dos ondas que corresponden a energías $E_0/2$ y $E_0 = E_0/2 + E_0/2$, con lo cual el balance de energías concuerda. Por otro lado para $O$ antes teníamos una energía $E_0 + K$ y después dos ondas con energías distintas dadas por los coeficientes de $-t/\hbar$ que te han salido en el ejercicio anterior.

**6)** Muestra que la ecuación que da el balance de energías para $O$ es

$$E_0 + K = \frac{E_0}{2}\left(\sqrt{\frac{1-v}{1+v}} + \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}\right).$$

[1] Realmente la famosa fórmula estrictamente no está allí pero sí una frase que equivale a ella. Si tienes curiosidad, hay una traducción en `https://www.fourmilab.ch/etexts/einstein/E_mc2/e_mc2.pdf`.

**7)** Desarrolla por Taylor en $v$ hasta segundo orden el segundo miembro de la fórmula anterior.

Para velocidades muy pequeñas en comparación con las de la luz (recuerda de nuevo que es 1) la energía cinética debería ser como la de Newton, $\frac{1}{2}mv^2$, por consiguiente el polinomio de Taylor de orden dos del primer miembro debería ser $E_0 + \frac{1}{2}mv^2$.

**8)** Igualando ambos polinomios concluye la fórmula de Einstein $E_0 = m$.

Con esto hemos terminado de justificar (2).

Recuerda que la ecuación de Schrödinger para una partícula libre (en ausencia de fuerzas, $V = 0$) es

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi \tag{3}$$

y que uno podría "justificar" esta ecuación pidiendo que $e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)/\hbar}$, que aúna las fórmulas de Planck y de Broglie, sea solución e interpretando que simplemente afirma $E = \|\vec{p}\|^2/2m$, lo cual es una relación bien conocida de la mecánica básica cuando no hay potencial ($E = \frac{1}{2}mv^2$ y $\vec{p} = m\vec{v}$). Procediendo de esta forma, si usamos la fórmula relativista (2), la ecuación natural es la llamada *ecuación de Klein-Gordon*:

$$\hbar^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \hbar^2\Delta\Psi + m^2\Psi = 0. \tag{4}$$

**9)** Comprueba que realmente $\Psi = e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)/\hbar}$ satisface esta ecuación.

**10)** Comprueba que si pensamos, como ya habías visto, que $E$ y $\vec{p}$ corresponden a los operadores diferenciales $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ y $-i\hbar\nabla$ entonces la ecuación (2) pensada como $EE = m^2\mathrm{Id}+\vec{p}\cdot\vec{p}$ también conduce a (4).

**11)** Explica por qué la ecuación de Klein-Gordon en unidades no relativistas es:

$$\hbar^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \hbar^2c^2\Delta\Psi + m^2c^4\Psi = 0.$$

Nota que (4) es la ecuación de ondas con un término más. Schrödinger comenzó introduciendo (4) pero vio que daba problemas y se quedó con (3). Dos de los problemas fundamentales son que la probabilidad total $\int|\Psi|^2$ no se conserva y que dado un estado inicial $\Psi(\vec{x}, t = 0)$ no es posible deducir sin más información el estado en los tiempos futuros. Es lo mismo que ocurre en la ecuación de ondas: fijar $u(x, 0)$ da lugar a infinitas soluciones si no se fija también el valor de $u_t(x, 0)$. La razón matemática general para ello es que (4) no es de primer orden en $t$ mientras que (3) sí lo es.

Ambos problemas están relacionados si pensamos en por qué la ecuación de Schrödinger conserva la probabilidad total $\int |\Psi|^2$. No sé si esto lo has leído. Te lo cuento en dimensión 1. Supón que tienes una función de ondas $\Psi = \Psi(x,t) \in \mathbb{C}^2$ que decae rápido en el infinito, en particular $\Psi, \Psi_x \to 0$ cuando $x \to \infty$, y que satisface (3). Entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \big(\Psi_t\overline{\Psi} + \overline{\Psi}_t\Psi\big) = i\frac{\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} \big(\Psi_{xx}\overline{\Psi} - \overline{\Psi}_{xx}\Psi\big).$$

Integrando por partes se obtiene $-\Psi_x\overline{\Psi}_x + \overline{\Psi}_x\Psi_x = 0$. Por tanto, $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2$ no varía con el tiempo.

**12)** Justifica los cálculos anteriores.

El cálculo de $\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2$ involucra derivadas de primer orden respecto de $t$ pero (4) solo da información acerca de las derivadas segundas. Esa es la razón por la que no hay conservación de la probabilidad si queremos conservar el significado de $\Psi$.

---

**Tarea a entregar.** Debes escribir un documento en el que conectes las soluciones de todos estos ejercicios y que esté redactado de una manera fluida.

Sobre la extensión te recomiendo cinco o seis páginas pero digamos una holgura de dos páginas por arriba o por abajo, también me parece razonable. Intenta no estar mucho tiempo con la hoja porque es solo la antesala que conduce a la ecuación de Dirac, a la que es natural que dediques más esfuerzo.

---

## Referencias

[Cha16] F. Chamizo. Las ecuaciones de Maxwell en plan fácil. `http://www.uam.es/fernando.chamizo/physics/physics.html`, 2016.

[Ein05] A. Einstein. Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? *Annalen der Physik*, 18:639–641, 1905.

[FLS63] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 1: Mainly mechanics, radiation, and heat.* Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1963.