

Esta hoja y las sucesivas las iré poniendo en <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/tfg.html> donde también hay una lista de la propuesta inicial de los contenidos. Imitan el formato del trabajo que se indica en la guía docente en cuanto a márgenes y tamaño de letra. La fuente \LaTeX , los ficheros `AM20hoja*.tex`, te serán muy útiles como plantilla y para poder copiar fórmulas y referencias. Yo uso \BibTeX para las referencias, que las toma de un fichero externo, pero cambiaré los ficheros que cuelgue para que lo puedas compilar sin ello (a no ser que sepas usarlo). Si alguna vez ves que faltan las referencias al compilar, házmelo saber porque será que se me ha olvidado cambiarlo.

Las hojas incluyen explicaciones y referencias para que aprendas algunas cosas y algunos ejercicios. Al final te indicaré lo que me tienes que enviar. En general será una primera redacción en \LaTeX de un apartado para el trabajo. Yo lo corregiré y te lo mandaré de vuelta para que hagas los cambios indicados. Por supuesto que después se pueden hacer correcciones de conjunto para que todo cuadre mejor pero la idea es que, en la medida de lo posible, estos trozos conformen el trabajo. El límite es de 30 páginas, según la guía docente, lo que hace una media de unas 4 páginas por cada apartado, aunque unos serán más largos que otros.

Pasando a generalidades sobre tu trabajo, el plan es que primero aprendas un poco de física cuántica y un poco de relatividad sin entrar en muchas complicaciones. Seguramente lo primero, lo de esta hoja, te costará más porque la cuántica es en cierto modo menos creíble y te va requerir leer mucho. Una vez que aprendas de esos dos temas estarás preparada para entender qué motivó la ecuación de Dirac, de la que nos ocuparemos el resto del tiempo.

Un material muy bueno gratuito que puedes encontrar en la red es [Zwi16]. Te propongo lo siguiente, matizado por las observaciones detrás del ejercicio:

1) Lee los capítulos 3, 4 y 5 de las *Lecture Notes* de [Zwi16]. El autor del curso es un profesor muy bueno con lo cual también puedes sacar provecho de los vídeos, donde explica de palabra lo que hay en las notas.

Puedes hacer una selección o leer capítulos aledaños, dependiendo de tus gustos e intereses. Lo importante es que llegues a la ecuación de Schrödinger y quizá el material más prescindible es el que apela a cosas de relatividad, sobre todo si nunca has visto nada de ello. Si es el caso, en los capítulos 3 y 4 te saltarás unas cuantas cosas, no te preocupes, solo intenta más o menos que te suene la idea.

Si las cosas no te quedan nada claras, quizá merezca la pena que des un vistazo a las cosas escritas por mí que son de menos calidad pero están más orientadas a estudiantes de matemáticas: [Cha13] o lo que habías ya leído [Cha15] pero ahora añadiendo la sección §3.3.

Ahora vamos a ver un par de ejemplos con la ecuación de Schrödinger.

2) Escribe con cuidado, señalando para ti todos los detalles, el ejemplo del *pozo de potencial infinito*. Esto está hecho en muchos sitios, por ejemplo en [Cha15, §3.3] y realmente ya lo has

leído. Para introducir un pequeño cambio en vez de hacerlo en el intervalo $[0, 1]$ hazlo en $[0, L]$ con $L > 0$ cualquier constante. Es decir, las condiciones son ahora $\Psi(0, t) = \Psi(L, t) = 0$. Los niveles de energía te deberán salir $E_n = (n\pi\hbar)^2/(2mL^2)$.

3) Explica por qué a no ser que L sea pequeñísimo, nos parecerá que las energías del ejercicio anterior no van a saltos (no están cuantizadas) sino que pueden tomar una cantidad continua de valores. Busca el valor de \hbar en $J \cdot s$ (julios segundo que es lo mismo que m^2kg/s) y para una masa $m = 10^{-3}kg$ (un gramo) halla la escala L en metros a la que deberíamos trabajar para que $E_2 - E_1$ fuera de $1 J$. Para que te hagas una idea del tamaño, se asigna al protón un radio de $8,4 \cdot 10^{-16}m$.

4) Comprueba que la función de ondas de (4.3) en [Cha19] [perdón hay una errata, E_1 es negativo, $-2,18 \cdot 10^{-18}$] satisface la ecuación de Schrödinger en tres dimensiones para un electrón (masa $m_e = 9,10938 \cdot 10^{-31} kg = -\frac{1}{2}\hbar^2 E_1^{-1} r_0^{-2}$) con $V(x, y, z) = -C/r$ para cierta constante C donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. ¿Qué fórmula tiene C en términos de m_e y E_1 y \hbar ?

El potencial $V(x, y, z) = -C/r$ es el que corresponde al campo eléctrico que genera el protón del núcleo del átomo de hidrógeno. Mi recomendación es que para no hacerte un lío con las cuentas, veas primero que hay una fórmula sencilla para el laplaciano de e^r y de ahí deduzcas el laplaciano de e^{-r/r_0} que es el que necesitas.

5) Comprueba el cálculo en (5.4) de [Cha19] que da la probabilidad de que el electrón se detecte a distancia mayor que $10r_0$. Nota que obviamente en el segundo límite de integración debería ser $x^2 + y^2 + z^2 > (10r_0)^2$ [perdón de nuevo].

Termino esta hoja dándote algunas otras fuentes por si quieres añadir algo. No te sientas obligada de ningún modo a mirar nada de esto.

El artículo original de Schrödinger es [Sch26]. Hay un enlace en las referencias de [Wik20a] desde el que te lo puedes descargar. Tiene mucha letra y pocas fórmulas y apela a algunos conceptos del formalismo de la mecánica. Es, por supuesto, interesante pero no estoy seguro de que puedas sacar mucho de él.

En [Wik20b] hay una discusión amplia de la motivación para la ecuación de Schrödinger. Seguramente casi todo te resulte avanzado pero quizá te aporte algo el apartado 5, el que se llama *Schrödinger equation*.

Los dos primeros tomos de las lecturas de física de Feynman son excelentes pero el tercero que se ocupa de física cuántica [FLS65]¹ a mí no me parece muy bueno. De todas formas los capítulos 1–3 te pueden dar ciertas ideas sobre el experimento de doble rendija y cosas así. Por cierto, en [BPLB13] hay imágenes de un experimento de este tipo por si lo quieres mirar o citar. Fíjate que el artículo es reciente y las imágenes no muy perfectas. Muchos de los experimentos

¹Hay acceso gratuito en <https://www.feynmanlectures.caltech.edu/>.

que aparecen en los libros de física cuántica son mentales más que reales o solo se han hecho recientemente.

Hay una segunda y una tercera parte del curso [Zwi16]. El primer capítulo de la segunda [Zwi13] trata de nuevo la ecuación de Schrödinger y hace unas cuantas consideraciones matemáticas sobre el caso de una dimensión que te pueden resultar interesantes. De nuevo a mí las explicaciones me parecen muy buenas.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine lo que has aprendido. La extensión es libre siempre que no superes las 5 páginas con el formato de esta hoja. Selecciona los temas del modo que prefieras, lo que debe incluir sin excepción es unas palabras sobre el origen de la mecánica cuántica, el significado de la función de ondas, la ecuación de Schrödinger, el ejemplo del pozo de potencial infinito (breve) y algunas ideas que sugieran que los observables o al menos la posición y el momento, son operadores. Ya sé que son muchas cosas pero algunas se reducirán a un esbozo.

Tómate el tiempo que necesites, porque ya entiendo que es bastante trabajo. A mi juicio esta será una de las hojas que más te va a costar. Hasta dentro de tres semanas o así no empezaré a recordártelo.

Referencias

- [BPLB13] R. Bach, D. Pope, S.-H. Liou, and H. Batelaan. Controlled double-slit electron diffraction. *New Journal of Physics*, 15(3):033018, mar 2013.
- [Cha13] F. Chamizo. Consideraciones muy básicas sobre la ecuación de Schrödinger. <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/schr.pdf>, 2013.
- [Cha15] F. Chamizo. Un poco de física cuántica para chicos listos de primero (del grado de física o matemáticas). <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/physics.html>, 2015.
- [Cha19] F. Chamizo. Cauchy-Schwarz y el principio de incertidumbre. <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/1819algII/titan/uncer.pdf>, 2019.
- [FLS65] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 3: Quantum mechanics*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1965.

- [Sch26] E. Schrödinger. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Phys. Rev.*, 28:1049–1070, Dec 1926.
- [Wik20a] Wikipedia contributors. Schrödinger equation — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accessed 8-September-2020].
- [Wik20b] Wikipedia contributors. Theoretical and experimental justification for the schrödinger equation — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accessed 8-September-2020].
- [Zwi13] B. Zwiebach. Quantum physics II. MIT OpenCourseWare, <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-05-quantum-physics-ii-fall-2013/>, 2013.
- [Zwi16] B. Zwiebach. Quantum physics I. MIT OpenCourseWare, <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-04-quantum-physics-i-spring-2016/>, 2016.