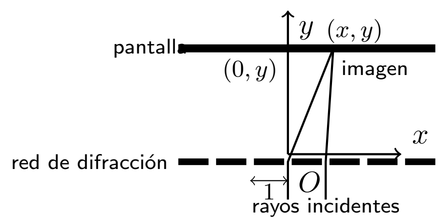
Cuando se examinan con mucha precisión las sombras de los objetos se percibe que no son nítidas y presentan oscilaciones. Por ejemplo, al hacer pasar un rayo de luz por una rendija muy fina frente a una pantalla, se observa no solo la parte central iluminada, lo cual es lógico, sino también una alternancia de zonas más y menos oscuras que he intentado simular en la primera figura (quizá con poco éxito). El fenómeno se conoce como *difracción* y se debe a la naturaleza ondulatoria de la luz que causa interferencias entre los rayos cercanos que parten de diferentes puntos de la rendija.


patrón para una sola rendija



En los laboratorios de física se emplean *red de difracción*. Estas son placas con una serie de rendijas diminutas igualmente espaciadas, que modelizamos como agujeros 1-periódicos en el eje x sobre los que inciden rayos perpendiculares que vienen de la parte negativa del eje y, como muestra la segunda figura[1].

El propósito de esta hoja es utilizar las sumas de Gauss para entender el *efecto Talbot*, un fenómeno poco intuitivo descubierto en el siglo XIX, consistente en que los patrones de difracción observados son periódicos respecto a la distancia a la pantalla y eligiéndola adecuadamente se reproduce la estructura de la red de difracción. Mira la imagen de [6] (que corresponde a una simulación, no a un experimento real). Observa que la parte de abajo, mostrando cuatro rendijas de la red de difracción, se replica en la parte superior, donde estaría la pantalla. Además, en posiciones dadas por una fracción de la distancia a la que se produce la replicación, se observa también la misma estructura con un cambio de escala o un desplazamiento. Se dice que este es el *efecto Talbot fraccionario*. Las intensidades dibujadas con diferentes tonos conforman lo que se llama la *alfombra de Talbot* y, como ves, tiene una llamativa apariencia de estructura fractal.

La teoría matemática de la difracción es complicada. Si tienes interés, escribí una breve introducción en [2], en [4] hay buenas explicaciones y referencias históricas, además está el clásico [1]. En pocas palabras, hay una fórmula complicada, llamada *fórmula de Kirchhoff*, que relaciona la solución de la ecuación de ondas en el interior de una región con los valores

[1] En la fuente LaTeX las figuras están creadas (sin mucho arte) con comandos Ti*k*Z. Si quieres usarlas, mira la cabecera del fichero y pon algo similar en la plantilla si no carga ese paquete. Hay muchos sitios donde puedes ver el efecto de una red de difracción real, por ejemplo `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diffraction_grating_demo.webm`. Ten en cuenta que la mayor parte de las imágenes de difracción que hay en *internet* son simulaciones con ordenador, mucho más vistosas que los experimentos reales.

de su frontera y mediante aproximaciones lineales y cuadráticas se obtienen los dos tipos de difracción considerados por los físicos, llamados *de Fraunhofer* y *de Fresnel*. Incluso si no miras nada de esto, da un vistazo a [5] para completar el siguiente ejercicio.

1) Escribe unas líneas para tu trabajo explicando el fenómeno de la difracción. No hace falta que te metas en fórmulas si no has leído nada de la teoría matemática, pero estaría bien que al menos mencionases la idea geométrica de la interferencia entre rayos de luz, posiblemente usando alguna función trigonométrica.

Aquí vamos a ver un modelo matemático simplificado que se ajusta a nuestro caso basado en la ecuación de ondas. Suponemos que la luz que empleamos es monocromática, esto significa que es una onda de la forma

$$u(x,y,t) = g(x,y)e(-\lambda^{-1}ct).$$

Esta suposición es natural, porque ondas de diferentes colores se difractan de manera distinta y no cuesta nada separarlos. Por si te suena la terminología, c corresponde a la velocidad de la luz, λ a la *longitud de onda*, cuyo inverso $k = \lambda^{-1}$ es el *número de onda* y la frecuencia es $\nu = \lambda^{-1}c$, que es lo que determina el color. Quizá te extrañe que se consideren ondas complejas. Este es un artificio matemático habitual para no tener que separar senos y cosenos.

Lo que queremos para nuestro problema es resolver la ecuación de ondas

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + c^2 u_{yy}$$

en el semiplano superior con cierta condición de frontera 1-periódica en el eje x. La hipótesis física que vamos a poner es que las soluciones viajen a lo largo de y sin deformarse mucho en esta dirección. Físicamente lo que se tiene en mente es una ecuación entre cuyas soluciones estén rayos que no sean muy oblicuos. La motivación es que la difracción es solo una pequeña perturbación sobre la idealización de los rayos viajando en línea recta sin cambiar de dirección. Matemáticamente la condición que se pide es que se cumpla $g(x,y) = A(x,y)\, e(ky)$ con A_{yy} despreciable.

2) Demuestra que, bajo la hipótesis $A_{yy} \approx 0$, la ecuación de ondas implica $A_{xx} + 4\pi ik A_y = 0$ y, en términos de g, $g_{xx} + 4\pi ik g_y + 8\pi^2 k^2 g = 0$. A esta ecuación se le llama *ecuación paraxial* y está estrechamente emparentada con la *ecuación de Schrödinger* que aparecerá más adelante en tu trabajo.

Nuestro objetivo pasa a ser resolver en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

$$(1) \qquad \begin{cases} g_{xx} + 4\pi ik g_y + 8\pi^2 k^2 g = 0, \\ g(x,0) = f(x) \end{cases}$$

con f una función 1-periódica. Con este fin, utilizamos el método de separación de variables. Esto es, buscamos soluciones de la forma $X(x)Y(y)$ y las superponemos ajustando los coeficientes para que se cumpla $g(x,0)=f(x)$. Si no has visto nunca este método, te recomiendo que antes de hacer el siguiente ejercicio mires primero algún ejemplo [3, §4.1].

No nos preocuparemos por la regularidad de f, la supondremos cuando la necesitemos. En términos físicos podríamos pensar que la red de difracción no tiene rendijas abruptas sino zonas de más y menos trasparencia.

3) Resuelve (1) aplicando el método de separación de variables bajo la hipótesis adicional de que X sea una función 1-periódica (porque el problema es invariante por $x \to x+1$). Concluye que la solución es

$$g(x,y) = e(ky)F(x,y) \qquad \text{con} \quad F(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e\big(nx - \frac{1}{2}\lambda n^2 y\big)$$

y c_n los coeficientes de Fourier de f. Lo que se observa en la pantalla al estudiar la difracción es la *intensidad* $|g|^2$, por tanto, el factor $e(ky)$ es irrelevante y toda la información sobre los patrones está en $|F|$.

El siguiente ejercicio es sencillo y explica el efecto Talbot original y uno de los fraccionarios.

4) A $y_T = 2\lambda^{-1}$ se le llama *distancia de Talbot*[2]. Comprueba que $f(x) = F(x, ny_T)$ para $n \in \mathbb{N}$. Esto es una manifestación del efecto Talbot: situando la pantalla en múltiplos enteros de y_T se replica la estructura de la red de difracción. Relaciona $f(x)$ y $F\big(x, \frac{1}{2}y_T\big)$ y explica con ello el aspecto de la sección 1/2 de la imagen de [6]. Este es el caso más simple del efecto Talbot fraccionario.

Ir más allá en la comprensión del efecto Talbot fraccionario requiere las sumas de Gauss. Como en las hojas anteriores, suponemos que a/q es una fracción irreducible.

5) Prueba que para $n \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$e\Big(\frac{an^2}{q}\Big) = \frac{1}{q}\sum_{m=0}^{q-1} G(a,-m,q)\, e\Big(\frac{nm}{q}\Big).$$

6) Deduce de la identidad anterior

$$g\Big(x, \frac{a}{q}y_T\Big) = \frac{e(aky_T/q)}{q}\sum_{m=0}^{q-1} G(-a,m,q)\, f\Big(x - \frac{m}{q}\Big)$$

[2]Los punteros láser rojos habituales tienen $\lambda = 650\cdot 10^{-9}\,m$ lo que parece dar una distancia de Talbot de más de $3000\,km$, lejos de un experimento real. La explicación es que habíamos usado como unidad la separación entre rendijas de la red de difracción. En los laboratorios las hay de más de 500 rendijas por milímetro. Con una de ellas habría que dividir el número anterior por más de $5\cdot 10^5$ reduciendo y_T a unos pocos metros.

y comprueba que para $a/q = 1/2$ se recupera el resultado que ya habías obtenido. Esta es una versión general del efecto Talbot que muestra que en posiciones fraccionarias obtenemos una combinación de trasladados de la red de difracción.

En suma, hemos dado una expresión finita sencilla para la solución de la ecuación en derivadas parciales (1) en con conjunto denso de valores de y, lo cual es muy llamativo.

7) Con lo que sabes sobre la evaluación de las sumas de Gauss, escribe una fórmula explícita para $g(x, y_T/6)$ en términos de f.

Ahora vamos a ver una consecuencia que me ha surgido al preparar esta hoja que, hasta donde yo sé, no es conocida. Su enunciado no hace referencia a las sumas de Gauss ni a la difracción, es puramente de análisis. Si f en (1) es suficientemente regular (por ejemplo, $f \in C^2$), el problema estará bien planteado y la solución será continua en el borde, es decir $\lim_{y \to 0^+} g(x, y) = f(x)$. Restringiendo y a $y = y_T/q$ con $q \to \infty$ y evaluando las sumas de Gauss, deberías ser capaz de completar el siguiente ejercicio.

8) Prueba que si f es real, 1-periódica y suficientemente regular entonces

$$\lim_{\substack{q \to \infty \\ q \equiv 1\ (4)}} \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{m=0}^{q-1} \cos\Big(\frac{\pi(q-1)m^2}{2q}\Big) f\Big(x - \frac{m}{q}\Big) = f(x).$$

Indicación: ¿Qué tienen que ver $\overline{4}$, el inverso de 4 módulo q, y $(q-1)/4$?

La convergencia no es muy lenta y se puede verificar numéricamente.

9) Dibuja con el ordenador la gráfica de $f(x) = e^{\operatorname{sen}(2\pi x)}$ y la gráfica de la expresión de la que se toma el límite para $q = 21$, 41 y 61. Ponlas en una misma figura o procede de alguna otra forma que muestre que estas últimas dan aproximaciones de la gráfica de f.

10) En la figura de [6] parece que en general, cuanto mayor es el denominador q, más puntos brillantes hay, pero esta propiedad falla para $a/q = 1/4$ y $a/q = 1/3$. Obtén una fórmula general para el número de puntos brillantes en términos de q. Indicación: Utiliza lo que sabes sobre $\big|G(a, b, q)\big|$.

Tarea a entregar. Escribe un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. La extensión recomendada es de 6 páginas con el formato de esta hoja o de la plantilla. Esta hoja me parece más breve que las anteriores y te puede quedar espacio para extenderte un poco sobre la difracción o incluir más figuras, si quieres hacerlo. El resultado conformará un tercer capítulo de tu TFG llamado *Difracción y efecto Talbot* o la variante que elijas.

Referencias

[1] M. Born and E. Wolf. *Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Pergamon Press, Oxford-New York-Paris, revised edition, 1965. With contributions by A. B. Bhatia, P. C. Clemmow, D. Gabor, A. R. Stokes, A. M. Taylor, P. A. Wayman and W. L. Wilcock.

[2] F. Chamizo. Matemáticas de la difracción y su interpretación física. `https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/difraction.pdf`, 2013.

[3] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[4] A. Komech and A. Merzon. *Stationary diffraction by wedges*, volume 2249 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Cham, 2019. Method of automorphic functions on complex characteristics.

[5] Wikipedia contributors. Diffraction — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Diffraction&oldid=1255271002`, 2024. [Online; accessed 14-November-2024].

[6] Wikipedia contributors. Talbot effect — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Talbot_effect&oldid=1240234219`, 2024. [Online; accessed 13-November-2024].