Esta hoja y las sucesivas, la previsión es que haya cinco en total, las iré poniendo en `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/tfg.html` donde se encuentra la propuesta inicial de los contenidos. La fuente LaTeX, en los ficheros `SL24hoja*.tex`, te será muy útil como plantilla y para poder copiar fórmulas y referencias. Más o menos imita el formato indicado en la guía docente. De todas formas, seguramente es más adecuado, para ahorrar tiempo, que las entregas de cada hoja las incluyas en la plantilla oficial del TFG que puedes descargar en Moodle.

Antes de comenzar, una aclaración sobre la notación: Utilizaré siempre la abreviatura

$$\boxed{e(x) \quad \text{para indicar} \quad e^{2\pi i x}}$$

lo cual es bastante común en teoría de números y menos en análisis. Deberías indicar esto de manera destacada en tu trabajo y en tu presentación porque nada garantiza que esta notación sea familiar a quien los vaya a juzgar.

Las protagonistas de tu trabajo son las *sumas de Gauss* (cuadráticas[1]) que, en su versión más básica, se definen como

$$G(a,q) = \sum_{n=0}^{q-1} e\Big(\frac{an^2}{q}\Big) \qquad \text{para } a \in \mathbb{Z} \text{ y } q \in \mathbb{Z}^+ \text{ coprimos.}$$

Esta condición de coprimalidad no entraña una restricción seria, esencialmente porque a/q siempre se puede simplificar.

Las *sumas de Gauss generalizadas* se obtienen añadiendo un término lineal:

$$G(a,b,q) = \sum_{n=0}^{q-1} e\Big(\frac{an^2+bn}{q}\Big) \qquad \text{con} \quad a,b \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad q \in \mathbb{Z}^+.$$

A pesar de que la condición de que a y q sean coprimos es matemáticamente menos natural en las sumas de Gauss generalizadas, la seguiremos manteniendo, sin mencionarla cada vez, porque aparece en las aplicaciones. Obviamente, $G(a,0,q) = G(a,q)$, así que las sumas generalizadas realmente generalizan.

Un hecho muy notable y profundo es que estas sumas admiten fórmulas explícitas compactas (en términos de ciertas funciones aritméticas) nada sencillas de probar y que requieren distinguir varios casos. De hecho, es difícil encontrar un tratamiento de todas las situaciones en

[1] Por si lees algo por tu cuenta, también se llaman sumas de Gauss a unas sumas asociadas a un par de *caracteres* módulo q, uno multiplicativo y otro aditivo [5]. Estas no aparecerán en tu trabajo, salvo que en la siguiente hoja surgirá tangencialmente su relación con $G(a,q)$, y por tanto no utilizaré más el adjetivo "cuadráticas".

la literatura ([7], [2, App. A]). A pesar de las complicaciones de la evaluación de las sumas de Gauss generalizadas, es relativamente sencillo hallar su módulo que viene dado por la fórmula

$$|G(a,b,q)| = \begin{cases} \sqrt{q} & \text{si } 2 \nmid q, \\ \frac{1+(-1)^{b+q/2}}{\sqrt{2}}\sqrt{q} & \text{si } 2 \mid q. \end{cases} \tag{1}$$

El plan para esta hoja es obtener primero la prueba de (1), a lo que corresponden los dos primeros ejercicios, y dedicar casi todo el resto a la evaluación de $G(1,q) = G(1,0,q)$.

1) Justifica las igualdades

$$|G(a,b,q)|^2 = \sum_{m,n=0}^{q-1} e\Big(\frac{a(n^2-m^2)+b(n-m)}{q}\Big) = \sum_{n=0}^{q-1} e\Big(\frac{an^2+bn}{q}\Big) \sum_{m=0}^{q-1} e\Big(\frac{2amn}{q}\Big).$$

Indicación: Para la segunda, considera el cambio $n \mapsto n+m$ módulo q.

2) Concluye (1) de lo anterior y deduce que $G(a,b,q)$ se anula si y solo si $2b+q+2$ es múltiplo de 4.

La evaluación de $G(1,q)$ es mucho más profunda. Por cierto, aunque parezca un caso muy particular, constituye la parte fundamental en la evaluación de $G(a,q)$ e, indirectamente, en la de $G(a,b,q)$.

Ya que no te incomoda programar, antes de abordar la evaluación de $G(1,q)$ te sugiero el siguiente ejercicio opcional

3) [Opcional] Haz un pequeño programa que calcule $G(1,q)/\sqrt{q}$ para muchos q impares y enuncia una conjetura al respecto. Gracias a (1) sabemos de antemano que $G(1,q) = u\sqrt{q}$ con u de módulo 1.

Si has hecho el ejercicio anterior, seguramente te parezca que una conjetura tan clara tiene que admitir una prueba sencilla. Sin embargo, no es así. Al propio Gauss le llevó muchísimo tiempo obtener una demostración. Aquí veremos una basada en análisis de Fourier.

Todo lo que debes recordar es que una función 1-periódica suficientemente regular, por ejemplo continua y C^1 a trozos, coincide con su serie de Fourier, esto es,

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\, e(nx) \qquad \text{con} \quad f_n = \int_0^1 F(t)\, e(-nt)\, dt.$$

Dos buenas referencias si quieres repasar el análisis de Fourier son [1] y [3]. Si lo tienes muy olvidado o la fórmula anterior no te cuadra con lo visto en el grado, pregúntame.

Para evaluar $G(1,q)$ vamos a considerar una función bastante rara:

$$F(x) = \sum_{-x\le k<q-x} e\Big(\frac{(x+k)^2}{q}\Big).$$

4) Explica por qué F es 1-periódica, continua en 0 y C^∞ en $(0,1)$.

La estrategia para la evaluación consiste en utilizar el desarrollo de Fourier de la siguiente forma:

$$G(1,q) = F(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{2n} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{2n+1}.$$

Si uno se pone muy puntilloso, aquí hay que aclarar que estamos suponiendo implícitamente que las series convergen porque, en general, la convergencia de una serie $\sum a_n$ no garantiza la de $\sum a_{2n}$ y $\sum a_{2n+1}$ por separado.

5) Usando un cambio $u = t + k - qn/2$ en la fórmula general de los coeficientes de Fourier, prueba

$$f_n = e\Big(-\frac{qn^2}{4}\Big)\sum_{k=0}^{q-1}\int_{k-\frac{qn}{2}}^{k+1-\frac{qn}{2}} e\Big(\frac{u^2}{q}\Big)\,du.$$

El milagro es que esta fórmula para los coeficientes de Fourier tan fea, se simplifica cuando sumamos sobre los índices pares e impares. Para el siguiente ejercicio, si quieres, da por supuesto que la integral impropia que aparece tiene sentido Riemann[2], esto es, que $\int_{-a}^{b} e(t^2/q)\,dt$ tiene límite cuando $a, b \to +\infty$, que es lo que garantiza que las dos series converjan. Esta integral es una variante de las integrales de Fresnel [6], por si las has visto en el grado.

6) Demuestra

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} e\Big(\frac{t^2}{q}\Big)\,dt \qquad \text{y} \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{2n+1} = e\Big(-\frac{q}{4}\Big)\int_{-\infty}^{\infty} e\Big(\frac{t^2}{q}\Big)\,dt.$$

7) Deduce de todo lo anterior

$$G(1,q) = C\sqrt{q}\big(1 + e(-q/4)\big)$$

con una C constante (independiente de q). Calcula su valor sustituyendo $q = 1$ y comprueba que concuerda con $q = 3$.

8) Reescribe tu conclusión como la siguiente evaluación explícita de $G(1,q)$:

$$G(1,q) = \begin{cases} (1+i)\sqrt{q} & \text{si } q \equiv 0 \pmod 4, \\ \sqrt{q} & \text{si } q \equiv 1 \pmod 4, \\ 0 & \text{si } q \equiv 2 \pmod 4, \\ i\sqrt{q} & \text{si } q \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

[2] Si te sabe mal no decir nada de la convergencia, cita por ejemplo [4, §2.4] o si prefieres demostrarlo tú mismo, piensa en variaciones de la identidad $2i\int_c^d e^{ix^2}\,dx = x^{-1}e^{ix^2}\big|_c^d + \int_c^d x^{-2}e^{ix^2}\,dx$ para cualquier intervalo $[c,d] \not\ni 0$, que se sigue integrando por partes.

9) Prueba que si q es impar, $G(1,b,q) = e(-\overline{4}b^2/q)\,G(1,q)$ y, en general, $G(a,b,q) = e(-\overline{4a}b^2/q)\,G(a,q)$ donde la barra indica el inverso módulo q, esto es, $n\overline{n} \equiv 1 \pmod{q}$. Indicación: Completa cuadrados módulo q.

10) Demuestra que si q_1 y q_2 son coprimos, $G(a,b,q_1q_2) = G(aq_1,b,q_2)G(aq_2,b,q_1)$. Indicación: Utiliza el teorema chino del resto para justificar que $q_2n + q_1m$ recorre los restos módulo q_1q_2 (cada uno una vez) cuando $0 \le n < q_2$ y $0 \le m < q_1$.

Este último ejercicio es solo para practicar, reflejalo en tu trabajo solo si tienes espacio suficiente. Quizá te parezca interesante comprobar el resultado con un pequeño programa.

11) Calcula $G(30,3,77)$ escribiendo el resultado como $e(\alpha)\sqrt{77}$. Indicación: Utiliza los tres ejercicios anteriores factorizando $77 = 7 \cdot 11$.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. La extensión es libre con una fuerte recomendación de que no superes las 7 páginas, sin contar la bibliografía, con el formato de esta hoja o de la plantilla para que no tengamos que hacer muchos recortes al final. Es mucho más importante poner buenas explicaciones que detalles en los cálculos. El resultado debe dar lugar a un primer capítulo de tu TFG llamado *Evaluaciones básicas* o algo parecido. Si no ves manera de ajustarte a la extensión recomendada, los tres últimos ejercicios podrían pasarse al siguiente capítulo.

Referencias

[1] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals*. Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.

[2] J. H. Hannay and M. V. Berry. Quantization of linear maps on a torus-Fresnel diffraction by a periodic grating. *Phys. D*, 1(3):267–290, 1980.

[3] T. W. Körner. *Fourier analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2022. Reprint of [0924154], With a foreword by Terence Tao.

[4] N. N. Lebedev. *Special functions and their applications*. Dover Publications, Inc., New York, 1972. Revised edition, translated from the Russian and edited by R. A. Silverman, Unabridged and corrected republication.

[5] Wikipedia contributors. Gauss sum — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Gauss_sum&oldid=1159171566, 2023. [Online; accessed 3-August-2024].

[6] Wikipedia contributors. Fresnel integral — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fresnel_integral&oldid=1235209316, 2024. [Online; accessed 4-August-2024].

[7] Wikipedia contributors. Quadratic gauss sum — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quadratic_Gauss_sum&oldid=1232812811, 2024. [Online; accessed 3-August-2024].