Esta hoja está dedicada a probar una de las fórmulas más famosas de Ramanujan [1, p. 162]. Concretamente, para $|\Re(z)|, |\Im(z)| < 1$

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\cos(\pi n z)}{\cosh(\pi n)}\right)^{-2} + \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\cosh(\pi n z)}{\cosh(\pi n)}\right)^{-2} = \frac{4\pi\Gamma^2(3/4)}{\Gamma^2(1/4)}. \tag{1}$$

A pesar de que, hasta donde yo sé, esta fórmula no tiene aplicaciones, es muy bonita en el sentido en que se suele utilizar este adjetivo en matemáticas: es simétrica e inesperada.

La Γ que aparece en el segundo miembro es la función que estudiamos en la primera hoja. Si te apetece practicar con ella, quizá quieras hacer el siguiente ejercicio e incluir parcial o totalmente su solución en tu trabajo. Lo que tú prefieras.

1) [Opcional] En realidad Ramanujan escribió $2\pi^{-1}\Gamma^4(3/4)$ en el segundo miembro. ¿Por qué es lo mismo? ¿Por qué se podría escribir también como $\frac{1}{2}\pi^3\big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^4}\,dt\big)^{-4}$?

Un apunte más en la línea de lo anterior, es que Ramanujan tampoco indicó el rango de validez de (1), que coincide con la intersección de las regiones de convergencia de ambas series ($|\Im(z)| < 1$ y $|\Re(z)| < 1$, respectivamente). Por cierto, en este rango de validez hay una errata en la edición [1] que contiene pruebas (modernas) detalladas.

La prueba de (1) que veremos sigue las líneas de [3] y utilizará resultados de todas las hojas anteriores. Gracias al uso de estos resultados previos, la demostración será relativamente breve. No ha llegado hasta nuestros días la de Ramanujan y la incluida en [1] requiere saber bastante de funciones elípticas e hipergeométricas. En [1] se atribuye a [5] la primera prueba conocida y se dice que usa *contour integration*, lo cual suena sencillo, pero no veo allí (1) y para fórmulas con constantes relacionadas usa resultados nada fáciles de funciones elípticas.

Empezamos con un resultado general de variable compleja que es una aplicación del teorema de Liouville. De hecho, el enunciado original que dio Liouville hablaba de funciones con dos periodos [4] y está en ese aspecto más cerca de este resultado que del que se cuenta en los cursos de variable compleja hoy en día.

2) Sea f una función meromorfa en todo $\mathbb{C}$, impar, verificando $f^2(z) = f^2(z+1) = f^2(z+i)$ y tal que en $|z| < 1$ tiene un único polo que está en $z = 0$ y es simple. Demuestra que $f^2(z) + f^2(iz)$ es constante. Indicación: Usando que f es impar, prueba que la singularidad en $z = 0$ de $f^2(z) + f^2(iz)$ es evitable y deduce de la periodicidad que se extiende a una función entera acotada.

Este resultado suena útil para probar (1) porque si llamamos $f(z)$ al inverso de la primera serie, entonces $f(iz)$ es el inverso de la segunda. Sin embargo, no está nada claro que tal f se extienda a una función meromorfa, además es par en lugar de impar. Por otro lado, está el problema de identificar la constante, que es lo más complicado y en lo que usaremos la fórmula límite de Kronecker.

Los dos siguientes ejercicios estarán dedicados a elegir la f y después nos ocuparemos de relacionarla con las series del enunciado. Primero definimos la función meromorfa

$$P(z)=\prod_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{\infty}\frac{\cosh(\pi n)+\cos(\pi z)}{\cosh(\pi n)-\cos(\pi z)}=\prod_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{\infty}\coth\Big(\frac{\pi}{2}(n-iz)\Big)\coth\Big(\frac{\pi}{2}(n+iz)\Big).$$

La igualdad entre ambas expresiones es una simple manipulación (no hace falta que la compruebes). En la línea de la política de hojas anteriores, si quieres, da por supuesta la convergencia (a una función meromorfa) de estos productos, la cual se sigue de teoremas generales que se suelen ver en Variable Compleja II.

3) Prueba que $f(z)=P(i+2z)$ satisface las hipótesis del ejercicio anterior, por tanto, $P^2(i+2z)+P^2(i+2iz)$ es constante. Indicación: Comprueba que $-P(i+2z)/P(3i+2z)=1$ porque los factores se cancelan por parejas usando el segundo producto en la definición de P. Cambiando z por $z-i$ y empleando que P es par, se sigue $-f(-z)=f(z)$.

4) Deduce de lo anterior que $P^2(i+2z)+P^2(i-2iz)$ es constante y, con el cambio de variable $z\mapsto(z+1-i)/2$, que $P^{-2}(z)+P^{-2}(iz)$ también lo es.

Ahora vamos a ver que $P(z)$ en realidad es igual, salvo una constante multiplicativa, a la primera de las series en (1). En particular, el primer miembro tiene perfecto sentido en $|\Re(z)|,|\Im(z)|<1$ porque la series no se anulan. La proporcionalidad entre $P(z)$ y la primera serie es muy sorprendente, sin embargo, la prueba no es tan difícil. Por continuación analítica (principio de unicidad), basta probarla para $z\in\mathbb{R}$ y se sigue para $|\Im(z)|<1$, que es la región de convergencia de la primera serie. Dos funciones de variable real 1-periódicas regulares coinciden si y solo si tienen los mismos coeficientes de Fourier, por tanto, $P(2x)=K\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\cos(2\pi nz)}{\cosh(\pi n)}$ equivale a $c_n\cosh(\pi n)=K$ con $c_n=\int_0^1 P(2x)\,e^{-2\pi inx}\,dx$.

5) Sea $\mathcal{P}$ el paralelogramo de vértices 0, 1, $2+i$, $1+i$. Llamemos γ_v al lado que acaba en el vértice v con orientación positiva. Usando las simetrías de P, demuestra

$$\int_{\partial\mathcal{P}}g=\int_{\gamma_1}g+\int_{\gamma_{1+i}}g=\big(1+e^{2\pi n}\big)\int_{\gamma_1}g=\big(1+e^{2\pi n}\big)c_n\qquad\text{con}\quad g(z)=P(2z)\,e^{-2\pi inz}.$$

Concluye el resultado buscado con $K=\pi i\operatorname{Res}\big(P(2z),1+i/2\big)$ a partir del teorema de los residuos. No trates de evaluar exactamente K porque sería muy difícil (esto tiene que ver con el resto de la hoja), lo importante es que es una constante, no depende de n.

Con los ejercicios anteriores, ya sabemos que el primer miembro de (1) es una constante. Ahora vamos a identificarla. Tomando $z=0$, lo que hay que probar es

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\cosh(\pi n)}=\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)\sqrt{2\pi}}. \tag{2}$$

6) Empleando la fórmula vista en la hoja 2 para $\theta^2(0,q)$, recordando la función $r(n)$ de la hoja 3 y el ejercicio final de la hoja 4, demuestra

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\cosh(\pi n)} = \theta^2\big(0,e^{-\pi}\big) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n)e^{-\pi n} = \exp\bigg(\lim_{s\to 1^+}\Big(\zeta(2s-1) - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{n^s}\Big)\bigg).$$

Aunque parezca que esto es complicar las cosas, vamos a ser capaces de calcular el límite. Para ello definimos la función auxiliar muy similar a la función ζ de Riemann:

$$L(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \dots \qquad \text{para} \quad \Re(s) > 1.$$

Hay pruebas clásicas del valor de $\theta\big(0,e^{-\pi}\big)$ que no pasan por esta función ni por el límite, pero son difíciles [1, p. 103], [2, Th. 1.7, 2.3], [6, §22.8].

7) Demuestra $\sum_{n=1}^{\infty} r(n)/n^s = 4\zeta(s)L(s)$ usando la expresión para $r(n)$ en términos de divisores de la hoja 3. Prueba también $2\Gamma(s)L(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\operatorname{sech} t\, dt$ empleando $\Gamma(s)n^{-s} = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-nt}\, dt$, gracias a la representación integral de Γ de la hoja 1.

8) Con la aprendido en la hoja 1, muestra $\zeta(s) - 2\Gamma(s)\zeta(2s-1) \to 0$ para $s\to 1^+$ (para ello necesitarás obtener primero $\Gamma'(1) = -\gamma$) y deduce

$$\lim_{s\to 1^+}\Big(\zeta(2s-1) - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{n^s}\Big) = \lim_{s\to 1^+}\Big(1 - \frac{4}{\pi}\Gamma(s)L(s)\Big)\zeta(2s-1) = \lim_{s\to 1^+}\frac{\pi - 4\Gamma(s)L(s)}{2\pi(s-1)}$$

y, aplicando la regla de L'Hôpital y la fórmula integral para $\Gamma(s)L(s)$,

$$\lim_{s\to 1^+}\Big(\zeta(2s-1) - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{n^s}\Big) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{ds}\Big|_{s=1}\big(\Gamma(s)L(s)\big) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\log t}{\cosh t}\, dt.$$

Recapitulando, lo único que nos falta para completar la demostración de (2) y, por tanto, de la fórmula inicial (1) es la evaluación integral:

$$\int_0^\infty \frac{\log t}{\cosh t}\, dt = \pi \log\Big(\frac{\Gamma(3/4)\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1/4)}\Big).$$

El último ejercicio cumple esta tarea utilizando el teorema de los residuos. Si necesitas indicaciones, dímelo. Por cierto, la convergencia de las integrales que aparecen en él está garantizada porque para z con $\Im(z)$ grande se cumple $\big|\log\Gamma(z)\big| \le C|z|\log|z|$. Esto se puede obtener de las fórmulas de la primera hoja, pero puedes darlo por supuesto citando, si quieres, [6, §12.33] donde hay un resultado mucho más preciso.

9) Sea $f(z) = i\sec(2\pi z)\log\Gamma(1/2+z)$ que es meromorfa en la banda $B = \big\{|\Re z| < 1/2\big\}$ con polos simples en $\pm 1/4$. Aplica el teorema de los residuos a f en una región que "tienda" a esta banda para obtener

$$\log\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log\Gamma(1+it)}{\cosh(2\pi t)}\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log\Gamma(it)}{\cosh(2\pi t)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|t|}{\cosh(2\pi t)}\,dt$$

donde se ha usado $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ en el último paso. Finalmente, relaciona esta integral con la buscada.

Tarea a entregar. Escribe un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. Trata de no pasarte de 6 páginas con el formato de esta hoja. El resultado conformará el cuarto capítulo de tu TFG bajo el nombre *Una fórmula de Ramanujan* o la variante que prefieras. Esta es la última hoja. Cuando termines, selecciona el material hasta tener una versión que, sin contar apéndices, se ajuste a la extensión recomendada y envíamela para que la examine con detalle.

Referencias

[1] B. C. Berndt. *Ramanujan's notebooks. Part III.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[2] J. M. Borwein and P. B. Borwein. *Pi and the AGM.* Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1987. A study in analytic number theory and computational complexity, A Wiley-Interscience Publication.

[3] F. Chamizo. A simple evaluation of a theta value, the Kronecker limit formula and a formula of Ramanujan. *Ramanujan J.*, 59(3):947–954, 2022.

[4] B. L. Laptev, B. A. Rozenfel′d, and A. I. Markushevich. *Mathematics of the 19th century.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1996. Geometry, analytic function theory. Translated from the 1981 Russian original by R. Cooke.

[5] G. N. Watson. Theorems Stated by Ramanujan (II): Theorems on Summation of Series. *J. London Math. Soc.*, 3(3):216–225, 1928.

[6] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A Course of Modern Analysis.* Cambridge University Press, 1996.