En algunos temas avanzados de teoría de números aparece la función definida por una serie

$$E(z,s) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^2-\{\vec{0}\}} \frac{(\Im(z))^s}{|n_1 z + n_2|^{2s}} \qquad \text{donde} \quad \Im(z) > 0 \quad \text{y} \quad \Re(s) > 1.$$

Se dice que es una *serie de Eisenstein real* o, a veces, *espectral*. Se puede probar, aunque no es nada sencillo, que para cada z fijado admite una extensión meromorfa a $\mathbb{C}$ en s con un único polo simple en $s = 1$. La *fórmula límite de Kronecker*, que estudiaremos en esta hoja, afirma que en su desarrollo de Laurent $a_{-1}/(s-1) + a_0 + a_1(s-1) + \dots$ el residuo a_{-1} es π y a_0 se expresa en términos de cierta función famosa. El enunciado habitual (cf. [6]) se escribe en forma de límite:

$$\text{(1)} \qquad \lim_{s\to 1^+} \Big(E(z,s) - \frac{\pi}{s-1} \Big) = 2\pi \log \frac{e^\gamma}{2|\eta(z)|^2 \sqrt{\Im(z)}}$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni y η es la *función eta de Dedekind*, una función holomorfa en $\Im(z) > 0$, relevante en teoría de números y en variable compleja y que relacionaremos con $\theta(0,q)$ al final de la hoja, definida por

$$\eta(z) = e^{\pi i z/12} \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - e^{2\pi i n z}\big) \qquad \text{para} \quad \Im(z) > 0.$$

Seguramente $E(z,s)$ te parecerá una función rara y el interés en ella infundado. A continuación te voy a explicar por encima la motivación de unas funciones relacionadas más sencillas. Ya sabes que el interés de $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ en teoría de números viene sobre todo de la fórmula producto $\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$ que la relaciona con los primos. Es posible definir primos (en realidad se hace con ideales) en ciertos anillos de extensiones cuadráticas de $\mathbb{Q}$. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}[i]$ los *primos gaussianos* son los $a + bi$ que no son unidades y que no se factorizan como producto de elementos de norma menor. Cuando uno emplea primos de estos anillos cuadráticos, resulta que al generalizar la fórmula producto esta se escribe en términos de *funciones zeta de Epstein* $\zeta(s,Q)$ asociadas a formas cuadráticas definidas positivas Q. Dichas funciones se definen como las series:

$$\zeta(s,Q) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^2-\{\vec{0}\}} \big(Q(\vec{n})\big)^{-s} \text{con} \quad \Re(s) > 1$$

en clara analogía con la función ζ de Riemann. La fórmula límite de Kronecker (1) es equivalente a que para cualquier $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ forma cuadrática real con $D = 4ac - b^2 > 0$ y $a > 0$ se cumpla

$$\text{(2)} \qquad \lim_{s\to 1^+} \Big(\frac{\sqrt{D}}{4\pi} \zeta(s,Q) - \zeta(2s-1) \Big) = \log \frac{\sqrt{a/D}}{|\eta(z_Q)|^2} \quad \text{con } z_Q = \frac{-b + i\sqrt{D}}{2a}.$$

Esta versión, ligeramente más compacta que (1), nos será útil en la próxima hoja, que es la última, para deducir una fórmula de Ramanujan.

En este primer ejercicio te propongo como tarea que deduzcas por ti mismo la equivalencia con una pequeña indicación. Si te resulta muy duro, dímelo y te doy más pistas o simplemente sáltatelo porque no es necesario para nuestros propósitos.

1) [Opcional] Nota que $Q(n_2, -n_1) = a|n_1 z_Q + n_2|^2$. Con eso y con lo que sabes del comportamiento de $\zeta(s)$ cerca de $s = 1$, demuestra que (1) y (2) son equivalentes.

El grueso de esta hoja está dedicado a probar la fórmula límite de Kronecker en la versión (2). Seguiremos las líneas de [1] salvo cambios de ordenación y notación, que están en parte inspiradas por [4]. Con ello conseguiremos una demostración algo más sencilla que las habituales [5]. Esta referencias son para tu curiosidad y por si quieres mencionarlas en el trabajo. La hoja está autocontenida y no es necesario que las estudies.

Vamos a comenzar con un resultado de variable compleja que es una aplicación del teorema de los residuos.

2) Sea $\epsilon > 0$ y $f : \big\{|\Im(z)| < 2\epsilon\big\} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa par tal que para algún $\alpha > 1$ verifica $\big|f(z)\big||z|^\alpha \to 0$ cuando $|\Re(z)| \to \infty$. Demuestra

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) = i\int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} f(z)\operatorname{cotg}(\pi z)\,dz.$$

Indicación: Aplica el teorema de los residuos en la región $\big\{|\Re(z)| \le N + \frac{1}{2},\ |\Im(z)| \le \epsilon\big\}$ con $N \in \mathbb{Z}^+$ tendiendo a ∞ y utiliza que $f(z)\operatorname{cotg}(\pi z)$ es impar para quedarte solo con la frontera superior.

3) Justifica con el teorema de Cauchy $\int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} f(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}} f$ para f como en el problema anterior. Explica también que $i\operatorname{cotg} z - 1 = 2e^{2iz} + 2e^{4iz} + 2e^{6iz} + \dots$ para $\Im(z) > 0$ y, con todo esto, deduce

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) - \int_{\mathbb{R}} f = 2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} f(z)\,e^{2\pi ikz}\,dz. \tag{3}$$

Esta es una variante de la fórmula de sumación de Poisson [2], [3, §2.7] que mencioné en la hoja 2.

Definamos la función

$$g_s(z) = p_s(z) + p_s(-z) \qquad \text{con} \quad p_s(z) = \big(Q(z,1)\big)^{-s}.$$

Si $\epsilon < \frac{1}{2}\Im(z_Q)$ entonces $Q(\pm z, 1)$ no se anula en $\big\{|\Im(z)| < 2\epsilon\big\}$ y $g_s(z)$ es una función holomorfa en z para cada $s \in \mathbb{C}$ (con la rama usual de las potencias).

4) Aplica (3) a $f(z) = n^{-2s} g_s(z/n)$ y suma en $n \in \mathbb{Z}^+$ para obtener, para cada $\Re(s) > 1$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \big(Q(m,n)\big)^{-s} - 2\zeta(2s-1)\int_{\mathbb{R}} p_s = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2s-1}} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} g_s(z)\, e^{2\pi i k n z}\, dz.$$

Dependiendo de tus habilidades con la variable compleja, puedes encontrar una solución breve para el próximo ejercicio usando que $Q(z,1) = a(z-z_Q)(z-\bar{z}_Q)$ puede reescribirse como $a(z_Q - \bar{z}_Q)\big((z-z_Q)^{-1} - (z-\bar{z}_Q)^{-1}\big)^{-1}$. No estoy inventando nada nuevo, es la descomposición en fracciones simples de toda la vida.

5) Utilizando el teorema de los residuos o la fórmula integral de Cauchy en la región $\big\{\Im(z) \ge \epsilon,\ |z| \le N\big\}$ con $N \to \infty$, demuestra

$$\int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} g_1(z)\, e^{2\pi i k n z}\, dz = \frac{2\pi}{\sqrt{D}}\big(e^{2\pi i k n z_Q} + e^{2\pi i k n \bar{z}_Q}\big).$$

Para el siguiente ejercicio es conveniente que recuerdes la serie de Taylor $-\log(1-z) = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \dots$ que es absolutamente convergente en $|z| < 1$. Nota también la igualdad elemental $\log(1-z) + \log(1-\bar{z}) = \log|1-z|^2$.

6) Tomando $s \to 1^+$, concluye de los dos ejercicios anteriores

$$\lim_{s\to 1^+} \Big(\zeta(s,Q) - 2\zeta(2s-1)\int_{\mathbb{R}} p_s\Big) = \frac{2\zeta(2)}{a} - \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \sum_{k=1}^{\infty} \log\big|1 - e^{2\pi i k z_Q}\big|^2.$$

El término $2\zeta(2)/a$ proviene de los sumandos de la serie $\zeta(s,Q)$ con $n_2 = 0$.

7) Justifica las igualdades

$$\lim_{s\to 1^+} \zeta(2s-1)\Big(2\int_{\mathbb{R}} p_s - \frac{4\pi}{\sqrt{D}}\Big) = \lim_{s\to 1^+} \frac{\int_{\mathbb{R}} p_s - \frac{2\pi}{\sqrt{D}}}{s-1} = \int_{\mathbb{R}} p_1 \log p_1.$$

Indicación: Para la última igualdad, aplica la regla de L'Hôpital.

8) Sumando los límites anteriores, deduce (2). Indicación: Recuerda que $\zeta(2) = \pi^2/6$. Para mostrar $\int_{\mathbb{R}} p_1 \log p_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{D}} \log\sqrt{\frac{a}{D}}$ puedes hacer el cambio $x = \frac{1}{2a}\big(\sqrt{D}\tan\frac{t}{2} - b\big)$ que reduce esta evaluación a probar $\int_{-\pi}^{\pi} \log\big(2\cos\frac{t}{2}\big)\, dt = 0$. Esto se sigue de $\log\big(2\cos\frac{t}{2}\big) = \Re\log\big(1+e^{it}\big) =$

$-\Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{int}$. Si desconfías de la convergencia adecuada de esta serie para intercambiarla con la integral, puedes considerar $\log\big(1+re^{it}\big)$ con $r\to 1^-$.

Una vez probada la fórmula límite de Kronecker, terminamos la hoja conectando las funciones η y θ. Antes de nada, para concretar más esta conexión en un caso particular, veamos cómo (2) permite encontrar sorprendentes relaciones entre valores especiales de $|\eta|$.

9) Explica por qué $\zeta(s,Q_0)=\zeta(s,Q_1)$ para $Q_j(x,y)=x^2+(y-jx)^2$ y deduce de (2) la relación $\big|\eta\big((1+i)/2\big)\big|=\big|\eta(i)\big|\sqrt[4]{2}$.

Para suscitar tu asombro (no lo compruebes ni lo reflejes en tu trabajo), calculando el módulo de cada factor en la definición de η, esta relación equivale a la extraña fórmula

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\cosh(\pi n)+(-1)^{n+1}}{2e^{-\pi n}\operatorname{senh}^2(\pi n)}=e^{-\pi/12}\sqrt{2}.$$

La conexión anunciada entre η y θ es una aplicación directa de la fórmula del triple producto.

10) Demuestra $\theta\big(0,e^{\pi i\tau}\big)=\eta^2\big((\tau+1)/2\big)/\eta(\tau+1)$.

Para el último ejercicio, recuerda que $\theta^2(0,q)=\sum_{n=0}^{\infty}r(n)q^n$ con $r(n)$ el número de representaciones de n como suma de dos cuadrados (primer ejercicio de la hoja 3).

11) Considerando (2) con $Q(x,y)=x^2+y^2$, prueba

$$\lim_{s\to 1^+}\Big(\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{n^s}-\zeta(2s-1)\Big)=-\log\Big(\sum_{n=0}^{\infty}r(n)e^{-\pi n}\Big).$$

En la próxima hoja veremos que el límite se puede evaluar explícitamente en términos de la función Γ. Con ello, calcularemos la suma de la serie dentro del logaritmo, la cual se relaciona con una fórmula famosa de Ramanujan.

Tarea a entregar. Escribe un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. Trata de no pasarte de 7 páginas con el formato de esta hoja. Evita dar muchos detalles de los cálculos. No hace falta que reflejes la discusión inicial sobre la motivación de $\zeta(s,Q)$ ni que hagas referencia a las series de Eisenstein si no lo deseas. El resultado conformará el cuarto capítulo de tu TFG bajo el nombre *La fórmula límite de Kronecker* o la variante que prefieras.

Referencias

[1] F. Chamizo. A simple evaluation of a theta value, the Kronecker limit formula and a formula of Ramanujan. *Ramanujan J.*, 59(3):947–954, 2022.

[2] F. Chamizo and D. Raboso. La fórmula de sumación de Poisson y parientes cercanos. *Materials Matemàtics*, pages 1–27, 2017. `https://mat.uab.cat/web/matmat/v2017n02/`.

[3] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals.* Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.

[4] Y. Motohashi. A new proof of the limit formula of Kronecker. *Proc. Japan Acad.*, 44:614–616, 1968.

[5] C. L. Siegel. *Lectures on advanced analytic number theory.* Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 23. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965. Notes by S. Raghavan.

[6] Wikipedia contributors. Kronecker limit formula — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kronecker_limit_formula&oldid=1184113756`, 2023. [Online; accessed 22-January-2024].