Esta hoja y las sucesivas las iré poniendo en `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/tfg.html` donde también hay una lista de la propuesta inicial de los contenidos. La fuente LaTeX, en los ficheros `RM23hoja*.tex`, te será muy útil como plantilla y para poder copiar fórmulas y referencias. Más o menos imita el formato indicado en la guía docente. De todas formas, seguramente es más adecuado, para ahorrar tiempo, que las entregas de cada hoja las incluyas en la plantilla oficial del TFG que puedes descargar en Moodle.

El tema de esta hoja es la definición y algunas propiedades de las funciones ζ y Γ. La primera de estas funciones viene dada por una serie y la segunda por un producto que se transforma en una serie al tomar la derivada logarítmica. Antes de nada, vamos a introducir una constante que aparecerá varias veces en tu trabajo y que es posible que conozcas de algún curso del grado.

1) Prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}\right)$ converge. Una posible manera de proceder es utilizar el criterio de comparación escribiendo el paréntesis como $\int_0^1\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right)dx$ y acotando la integral. Deduce de la convergencia que

$$\lim_{N\to\infty}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}-\log(N+1)\Big)$$

existe y es finito. A su valor se le llama *constante de Euler-Mascheroni* y se suele denotar con γ. Numéricamente es $\gamma=0{,}57721\dots$, por lo demás es una constante misteriosa de la que no se sabe si admite una expresión sencilla.

La *función ζ de Riemann* constituye una de las funciones más famosas en teoría de números y viene dada por una serie:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Su interés proviene de que está íntimamente ligada a la distribución de los números primos. Aunque no entraremos en ello, no me resisto a escribir el llamado *producto de Euler*:

$$\zeta(s)=\prod_p\Big(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\dots\Big)=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}$$

donde p recorre los primos. Te dejo libertad para que pongas o no unas palabras sobre esto en tu trabajo. Te recomiendo que al menos lo menciones.

Comenzamos estudiando cuándo tiene sentido la definición anterior de ζ.

2) Muestra que la serie que define ζ converge para todo número complejo s con $\Re(s)>1$ y diverge si s es real menor que 1. Apelando al teorema de Morera (o como prefieras) explica por qué la serie define una función holomorfa en $\Re(s)>1$.

En realidad, se puede probar aplicando un teorema general para cierto tipo de series complejas [4, Cor. 1.2] que la serie diverge para todos los números complejos $\Re(s) < 1$, no solo los reales. Todo esto sugiere que la serie solo nos permite definir ζ como "infinito" más allá de $\Re(s) > 1$. Sin embargo, resulta que hay una definición alternativa que permite ampliar su dominio (lo cual, dicho sea de paso, es de capital importancia para estudiar la distribución de los primos).

3) Demuestra para $\Re(s) > 1$ las igualdades

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}\,dx = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s\int_1^\infty \frac{x-\lfloor x\rfloor - 1/2}{x^{s+1}}\,dx$$

donde $\lfloor x\rfloor$ significa la parte entera.

4) Explica por qué la última integral converge para $\Re(s) > 0$. Deduce que ζ se puede extender a una función meromorfa definida al menos en $\Re(s) > 0$ donde tiene un único polo en $s = 1$ que es simple y con residuo igual a 1.

Si se te da muy bien el análisis quizá sepas demostrar que la integral permite llevar a cabo la extensión también a $\Re(s) > -1$ (no hace falta que lo hagas).

Al tener un polo simple en 1, se cumple que $\zeta(s) - 1/(s-1)$ permanece acotado cuando $s \to 1$. Vamos a apurar un poco más:

5) Demuestra que

$$\lim_{s\to 1}\Big(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\Big) = \gamma$$

justificando las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 1}\Big(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\Big) &= \frac{1}{2} - \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{x-\lfloor x\rfloor - 1/2}{x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2} - \lim_{N\to\infty}\Big(\log N - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2N}\Big) = \gamma.\end{aligned}$$

Para terminar con la función ζ, una curiosidad que puedes reflejar o no en tu trabajo. Fíjate que si uno sabe lo que he dicho antes de que la integral impropia en realidad converge para $\Re(s) > -1$, tomando $s = 0$ se obtiene $\zeta(0) = -1/2$, lo cual suena increíble si solo se tiene en mente la serie que define $\zeta(s)$, es como decir $1+1+1+\cdots = -\frac{1}{2}$. Antes de ser "descubierto", Ramanujan pensaba que una de sus grandes aportaciones matemáticas era una teoría de series divergentes (en realidad no tenía gran interés) y escribió cosas como $1+2+3+\cdots = -\frac{1}{12}$ que se pueden interpretar como $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ extendiendo más todavía la definición de ζ. Es un resultado clásico de Riemann que $\zeta(s) - 1/(s-1)$ se extiende a una función entera [3].

Ahora introduciremos la función Γ, o más bien $1/\Gamma$, como un producto infinito:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(\Big(1+\frac{z}{n}\Big) e^{-z/n} \Big)$$

donde $z \in \mathbb{C}$. Hay un resultado de variable compleja que afirma que si $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones enteras tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \big|f_n(z)-1\big|$ converge, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ define una función entera que se anula justamente en los puntos en los que alguna de las f_n se anula. Para no dispersarnos, lo daremos por supuesto (se prueba con herramientas de Variable Compleja II). Su aplicación al producto anterior muestra que $1/\Gamma(z)$ es una función entera cuyo conjunto de ceros es $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$. ¿Te resulta creíble que esto se deduzca del resultado indicado?

6) Explica por qué $\Gamma(z)$ es una función meromorfa con polos en $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ y todos son simples.

Ahora vamos a ver una fórmula alternativa con un límite que históricamente fue la definición de la función Γ que dio Gauss [5].

7) Usando la definición de γ como límite y truncando el producto hasta N, muestra que

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{N\to\infty} \frac{z(z+1)\dots(z+N)}{N!(N+1)^z}.$$

Con esto ya estamos preparados para dar una representación integral sencilla para Γ.

8) Integrando por partes N veces, prueba que si $\Re(z)>0$

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^N \Big(1-\frac{t}{N}\Big)^N t^{z-1}\,dt = \lim_{N\to\infty} \frac{N^z N!}{z(z+1)\dots(z+N)} = \Gamma(z).$$

La idea ahora es que $(1-t/N)^N \to e^{-t}$ si $N\to\infty$, pero hay que tener cuidado porque t varía al integrar y puede ser tan grande como N.

9) Demuestra que la fórmula

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt \qquad \text{para} \quad \Re(z)>0$$

se sigue si

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^N \Big(e^{-t} - \Big(1-\frac{t}{N}\Big)^N\Big) t^{z-1}\,dt = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{N\to\infty} \int_N^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt = 0.$$

La desigualdad

$$0 \le e^{-x} - \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n \le \frac{x^2 e^{-t}}{n} \qquad \text{para} \quad x \ge 0 \quad \text{y} \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

es conocida. Si quieres, más adelante te daré una referencia para que la pongas en tu trabajo.

10) Usando la desigualdad y lo que necesites, completa la prueba de la representación integral $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$ en $\Re(z) > 0$. La mayoría de los autores modernos toman esto como definición de Γ y después la extienden a $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_{\le 0}$.

Terminamos con dos propiedades fundamentales. La segunda es bastante más profunda.

11) Deduce a partir de la representación integral de $\Gamma(z)$ que

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \qquad \text{para} \quad z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}_{\le 0}.$$

Nota que una pequeña sutileza es que la integral solo es válida en $\Re(z) > 0$ con lo que hay que apelar a un resultado básico extra de variable compleja. ¿Sabrías con esta relación funcional calcular el residuo de $\Gamma(z)$ en $z = -2$?

Usando $\Gamma(1) = 1$ se sigue $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. En este sentido, Γ generaliza el factorial a valores no enteros.

12) Revisa en [1, Lema 4.4] el argumento que da lugar a la fórmula

$$\Gamma(s) \int_0^\infty x^{w-1}(1+x)^{-s}\, dx = \Gamma(s-w)\Gamma(w)$$

y tomando $s = 1$ y aplicando el teorema de los residuos para evaluar integrales, deduce la *fórmula de reflexión*

$$\Gamma(1-w)\Gamma(w) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi w)} \qquad \text{para} \quad w \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}.$$

¿Sabrías calcular $\Gamma(3/2)$ usando las dos propiedades?

Si no tienes mucha práctica con el cálculo de estas integrales mediante el teorema de los residuos, mira [2] o tu libro favorito de variable compleja o pídeme ayuda. Anticipo que lo natural aquí es considerar un dominio de tipo "cerradura" donde el ojo de la cerradura rodea al origen y de él parten dos ramas que pasan ligeramente por encima y por debajo del eje real positivo. La determinación natural del ángulo es de 0 a 2π.

Un comentario final, solo para tu curiosidad, es que si en la fórmula de reflexión empleas $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$ y la definición original de $1/\Gamma$ como producto infinito, se obtiene la curiosa fórmula

$$\operatorname{sen}(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^\infty \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big).$$

Si no la has visto nunca, seguro que te sorprenderá. Procediendo a la inversa, si uno conoce de antemano esta fórmula producto para el seno, se puede deducir la fórmula de reflexión sin calcular ninguna integral.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine lo que has aprendido con los ejercicios anteriores. La extensión es libre siempre que no superes las 6 o, a lo más, 7 páginas con el formato de esta hoja o de la plantilla. El resultado debe dar lugar a un primer capítulo de tu TFG llamado *Las funciones zeta y Gamma* o la variante que se te ocurra.

Referencias

[1] F. Chamizo. Convergencia de funciones holomorfas. `https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/1819vcII/resumenes/cnv.pdf`, 2019.

[2] R. V. Churchill and J. W. Brown. *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill Education, 2013.

[3] A. Ivic. *The Riemann Zeta-Function: Theory and Applications*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, Incorporated, 2013.

[4] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. *Multiplicative number theory. I. Classical theory*, volume 97 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[5] G. K. Srinivasan. The Gamma function: an eclectic tour. *Amer. Math. Monthly*, 114(4):297–315, 2007.