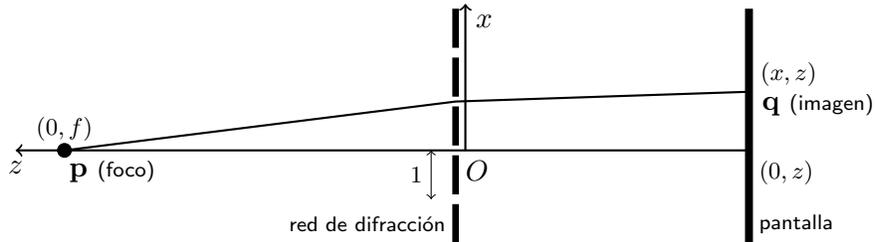


El *efecto Talbot* es el fenómeno poco intuitivo consistente en que cuando se hace pasar la luz por una *red de difracción* (una serie de rendijas igualmente espaciadas), los patrones de difracción observados son periódicos respecto a la distancia a la pantalla y a ciertas distancias se reproduce la estructura de la red. Te recomiendo que mires la imagen de [5]. Observa que la parte de abajo, correspondiente a cuatro rendijas de la red de difracción, se replica en la parte superior, donde estaría la pantalla. Además, en posiciones dadas por una fracción de la distancia a la que se produce la replicación, se observa también la misma estructura con un cambio de escala o un desplazamiento. Se dice que este es el *efecto Talbot fraccionario*. Las intensidades dibujadas con diferentes tonos conforman lo que se llama la *alfombra de Talbot* y, como ves, tiene una llamativa apariencia de estructura fractal.

El objetivo de esta hoja, fundamental en tu trabajo, es dar una explicación matemática del fenómeno.



En la figura TikZ anterior, que puedes copiar en tu trabajo sin darme crédito y modificar como te plazca, indico el esquema con el que vamos a trabajar. Es el mismo que en el segundo capítulo reduciendo en uno la dimensión (se quita la coordenada y), que es lo que se hace habitualmente para simplificar debido a la simetría del problema. Ahora \mathcal{A} está formado por la red de difracción. Para fijar ideas y reducir el número de parámetros suponemos que los centros de las rendijas están en los valores enteros de x , en particular, están a distancia 1. De esta forma, la función característica en x de la red de difracción es

$$D(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi\left(\frac{x+n}{w}\right) \quad \text{con} \quad \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $0 < w < 1$ indica el ancho de cada rendija.

1) Explica la fórmula anterior y halla los coeficientes de Fourier $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de D , simplificando el resultado lo más posible. Se cumple $c_n \in \mathbb{R}$ porque D es una función par. Recuerda que los coeficientes están dados por $c_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D(t) e(-nt) dt$.

La teoría de las series de Fourier asegura que, salvo en los puntos de discontinuidad,

$$D(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e(nx) \quad \text{entendido como} \quad D(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e(nx).$$

La convergencia es muy lenta por el poco decaimiento de c_n y en la práctica es conveniente sustituir χ por una versión regularizada que la aproxime. En cualquier caso, en esta hoja no nos preocuparemos de cuestiones de convergencia.

El siguiente ejercicio es sobre todo para verificar que entiendes lo anterior y que los cálculos son correctos.

2) Se llama *red de Ronchi* a la red de difracción en la que la separación entre rendijas consecutivas es igual ancho de cada rendija. Comprueba que para la red de Ronchi se tiene

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_{2m+1} = \frac{(-1)^m}{(2m+1)\pi} \quad \text{para } m \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad c_{2m} = 0 \quad \text{para } m \in \mathbb{Z}.$$

A continuación vamos a ver dos justificaciones para el efecto Talbot. La primera está en la línea de lo que hemos visto hasta ahora, pero requiere varias hipótesis que son difíciles de justificar matemáticamente. La segunda es mucho más sistemática a partir de una hipótesis bien formulada, pero es menos versátil.

En la primera justificación, tomamos como punto de partida [1, (6)], o (1.31) o (2.8) en tu trabajo. En nuestro contexto bidimensional, la integral que aparece allí viene dada por

$$I(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} D(t) e(k\sqrt{t^2 + f^2} + k\sqrt{(x-t)^2 + z^2}) dt.$$

Si no lo ves claro, incluye las explicaciones que consideres oportunas. Recuerda que $k = \lambda^{-1}$.

Como ahora no hay un solo orificio sino infinitud de rendijas, debemos reinterpretar el coeficiente de $I(x, z)$ en la fórmula para $U(\mathbf{q}) = U(x, z)$. Suponemos que la mayor contribución proviene de las rendijas que están enfrente de \mathbf{q} y que solo consideramos valores moderados de x , por tanto $\cos \beta$ es aproximadamente constante. Si la fuente de luz y la pantalla no están cercanas a la red de difracción, siempre pensando en la mayor contribución de las rendijas frente a \mathbf{q} , parece lógico pensar que $\|\mathbf{p}\|$ y $\|\mathbf{q}\|$ se pueden sustituir por f y $|z| = -z$. Consideramos que k y f son constantes, por tanto, después de todas estas reducciones, nos quedamos con

$$U(x, z) = Kz^{-1}I(x, z) \quad \text{con } K \text{ constante.}$$

Para aproximar $I(x, z)$ procederemos como en la difracción de Fresnel haciendo un desarrollo de Taylor de orden 2 de la primera raíz en t y de la segunda raíz en $x-t$. Cabe preguntarse si eso tiene sentido matemático porque la integral está extendida a todo \mathbb{R} y por tanto $|t|$ y $|x-t|$ pueden ser grandes en comparación con f y $|z|$ provocando que la aproximación de Taylor sea tremendamente mala (imagina, por ejemplo, aproximar $\sqrt{1+2x^2}$ por $1+x^2$ con x grande). Posiblemente es difícil hacer un teorema de ello, pero esperamos que los valores para los que la aproximación es mala no den una contribución significativa porque están lejos de ser puntos de fase estacionaria.

3) Lleva a cabo los desarrollos de Taylor de segundo orden indicados y efectúa el cambio $t \mapsto x - t$ para conseguir la aproximación

$$I(x, z) \approx e(kf - kz) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n b_n(x, z) e(nx) \quad \text{con} \quad b_n(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e\left(k \frac{(x-t)^2}{2f} - k \frac{t^2}{2z} - nt\right) dt.$$

La situación en la que aparece el efecto Talbot es cuando f es muy grande, de esta forma los rayos de luz llegan perpendicularmente a la red de difracción. Cabe esperar entonces que el término $k(x-t)^2/(2f)$ sea irrelevante.

4) Usando la integral de Fresnel, muestra que al omitir $k(x-t)^2/(2f)$ se obtiene

$$(1) \quad U(x, z) \approx K|z|^{-1/2} e(-kz)F(x, z) \quad \text{con} \quad F(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e\left(nx + \frac{1}{2}\lambda n^2 z\right)$$

para cierta K constante (en el sentido de que no depende de x o z).

Lo que se mide en los laboratorios es la intensidad de la onda $|U|^2$, por tanto, el factor $e(-kz)$ no tiene ninguna influencia sobre el patrón de difracción. Por otro lado, el factor $|z|^{-1/2}$ solo afecta al brillo del patrón. Indica cómo se atenúan las ondas luminosas según avanzan. De hecho, para $|z|$ grande su derivada es pequeña y puede considerarse localmente constante. En definitiva, $F(x, z)$ guarda toda la información acerca del aspecto del patrón de difracción.

5) A $z_T = 2\lambda^{-1}$ se le llama *distancia de Talbot*. Comprueba que F es z_T periódica en z y que se cumple $D(x) = F(x, -nz_T)$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. Esto es una manifestación del efecto Talbot: situando la pantalla en múltiplos enteros de z_T se replica la estructura de la red de difracción. Relaciona $D(x)$ y $F(x, -\frac{1}{2}z_T)$ y explica con ello el aspecto de la sección 1/2 de la imagen de [5]. Este es el caso más simple del efecto Talbot fraccionario.

Ahora vamos con una segunda forma de explicar el efecto Talbot desde principios más básicos y unas hipótesis matemáticamente más concretas.

En el plano xz , una onda monocromática (recuerda la terminología del primer capítulo), es de la forma $u(x, z, t) = g(x, z)e(-kct)$ con $k = \lambda^{-1}$. Vamos a buscar una ecuación en derivadas parciales que sea verificada por las ondas de este tipo que viajen a lo largo de $-z$ sin deformarse mucho en esta dirección. Físicamente lo que se tiene en mente es una ecuación entre cuyas soluciones estén rayos que no sean muy oblicuos. Matemáticamente la condición que se pide es que $g(x, z) = a(x, z)e(-kz)$ con a_{zz} despreciable.

6) Demuestra que, bajo las hipótesis anteriores, la ecuación de ondas $u_{tt} = c^2 u_{xx} + c^2 u_{zz}$ implica

$$g_{xx} - 4\pi i k g_z + 8\pi^2 k^2 g = 0.$$

A esta ecuación (o a su análoga en términos de a) se le llama *ecuación paraxial* y está estrechamente emparentada con la *ecuación de Schrödinger* que aparecerá en la siguiente hoja.

Nuestro objetivo es resolver la ecuación paraxial bajo la condición de frontera en $z = 0$ que impone la red de difracción. Es decir,

$$(2) \quad \begin{cases} g_{xx} - 4\pi i k g_z + 8\pi^2 k^2 g = 0, \\ g(x, 0) = D(x). \end{cases}$$

Con este fin, utilizamos el método de separación de variables. Esto es, buscamos soluciones de la forma $X(x)Z(z)$ y las superponemos ajustando los coeficientes para que se cumpla $g(x, 0) = D(x)$. Si no has visto nunca este método, te recomiendo que antes de hacer el siguiente ejercicio mires primero algún ejemplo [4, §4.1].

7) Resuelve (2) aplicando el método de separación de variables bajo la hipótesis adicional de que X sea una función 1-periódica (porque el problema es invariante por $x \rightarrow x + 1$). Concluye que la solución es (1) salvo el factor $|z|^{-1/2}$.

La ausencia del factor que da la atenuación en z de las ondas es natural, habida cuenta la hipótesis hecha de que haya poca deformación en dicha dirección. Si no estamos lejos de la red de difracción, esto es más realista el primer método, el cual colapsa para z pequeño como indica el factor $|z|^{-1/2}$.

Como contrapunto, siguiendo [3], veamos que una modificación del primer método permite tratar el caso en que \mathbf{p} no se supone infinitamente lejos. Digamos que $1/f$ es pequeño en términos absolutos y en comparación con $-1/z$, pero no despreciamos el término $(x-t)^2/(2f)$.

8) Calcula $b_n(x, z)$ y muestra que en esta situación, en lugar de (1) se obtiene

$$U(x, z) \approx K|z|^{-1}|z_*|^{1/2} e\left(\frac{kx^2}{2(f-z)} - kz\right) F\left(\frac{fx}{f-z}, z_*\right) \quad \text{donde } z_* = (z^{-1} - f^{-1})^{-1}.$$

Nota que z_* aproxima a z (son iguales cuando $f = \infty$). Entonces si z^* es un múltiplo entero de $-z_T$ se cumple $F\left(\frac{fx}{f-z}, z_*\right) = D\left(\frac{f}{f-z}x\right)$. Es decir, se obtiene una versión agrandada por un factor $(f-z)/f$ de la red de difracción. Esto es en cierto modo natural: la sombra de un objeto se agranda cuanto más próxima está la fuente de luz y más lejos la pantalla en la que se proyecta.

Ahora estudiaremos el efecto Talbot fraccionario utilizando las sumas de Gauss. En lo sucesivo suponemos que a/q es una fracción irreducible, esto es, $(a, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ con a y q coprimos.

La identidad el siguiente ejercicio debiera resultarte fácil después de la hoja anterior.

9) Prueba que para $n \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$e\left(\frac{an^2}{q}\right) = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} G(a, -m; q) e\left(\frac{nm}{q}\right).$$

10) Deduce de la identidad anterior

$$F\left(x, -\frac{a}{q}z_T\right) = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} G(-a, -m; q) D\left(x + \frac{m}{q}\right)$$

y comprueba que para $a/q = 1/2$ se recupera el resultado que ya habías obtenido. Esta es una versión general del efecto Talbot que muestra que en posiciones fraccionarias obtenemos una combinación de trasladados de la red de difracción.

Los dos ejercicios siguientes hacen referencia a la figura de [5]. Con nuestra notación los ejes de la figura son x (en vez de x/a) y $-z/z_T$ (en vez de y/z_T) y además su posición está intercambiada.

11) Demuestra que si $w < q^{-1}$ entonces $|F(x, -\frac{a}{q}z_T)|$ no depende de a , como sugiere la figura de [5]. Demuestra además que si $w = (2q)^{-1}$ con q impar, entonces

$$\left|F\left(x, -\frac{a}{q}z_T\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{q}} D_R(qx)$$

donde D_R es la D correspondiente a la red de Ronchi. Indicación: Recuerda lo que aprendiste sobre $|G(a, b; q)|$.

12) En la figura de [5] parece que en general, cuanto mayor es el denominador q , más puntos brillantes hay. Explica por qué esta propiedad falla para $a/q = 1/4$ y $a/q = 1/3$. ¿Sabrías dar una fórmula para el número de puntos brillantes en términos de q ?

Es muy conveniente que en tu trabajo incluyas alguna alfombra de Talbot. Una posibilidad es que tomes la imagen de [5] o alguno de los ejemplos de [2] (dentro de *The classic effect*). En esto último puedes ver al final un programa `Matlab/Octave` que permite generar las figuras. Es el que comienza con

```
1 % Classic Talbot
2 % Density plot of sqr( |F|^2 )
3 %
4 ... ..
```

y llama a la función

```
1 function [X,Y,R] = density_F( linv, wf, pr, tol)
2 % linv = lambda inverse
3 % wf = width function
4 % pr = precision
5 ... ..
```

(por cierto, he usado el paquete `listings` para incluir código aquí). Lo malo es que no dibuja exactamente la F definida aquí sino otra cantidad relacionada que tiene prácticamente el mismo aspecto. Si tienes un mínimo de conocimientos de `Matlab/Octave`, quizá te resulte fácil este último ejercicio opcional y te animes a crear tus propias imágenes.

13) [Opcional] Modifica el programa de [2] para que dibuje la alfombra de Talbot correspondiente a $|F(x, z)|$ limitando la suma infinita a $|n| \leq \lambda^{-1}$. Indicación: Basta con cambiar una línea.

Tarea a entregar. Al igual que en otras ocasiones, debes conectar las soluciones de los ejercicios anteriores para componer un documento que los combine. La extensión recomendada es de a lo más 8 páginas. Ya ves que en esta hoja hay bastante texto, lo que sugiere que una parte de la extensión debería estar dedicada a las explicaciones que ligan o motivan los ejercicios, más que a sus soluciones. El documento resultante conformará el cuarto capítulo de tu TFG con el título *El efecto Talbot clásico*, o la variante que prefieras.

Referencias

- [1] F. Chamizo. Matemáticas de la difracción y su interpretación física. <https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/diffraction.pdf>, 2013.
- [2] F. Chamizo. Talbot carpets. http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/dark/d_talbot.html, 2023.
- [3] J. M. Cowley and A. F. Moodie. Fourier images. I. The point source. *Proc. Phys. Soc. Sect. B.*, 70:486–496, 1957.
- [4] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
- [5] Wikipedia contributors. Talbot effect — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Talbot_effect&oldid=1205963917, 2024. [Online; accessed 26-February-2024].