Dados $a \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z}^+$ coprimos, se definen las *sumas de Gauss* (cuadráticas) como

$$G(a;q) = \sum_{n=1}^{q} e\Big(\frac{an^2}{q}\Big).$$

Cuando se añade un término lineal, se obtienen las *sumas de Gauss generalizadas*:

$$G(a,b;q) = \sum_{n=1}^{q} e\Big(\frac{an^2+bn}{q}\Big) \qquad \text{con} \quad a,b \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad q \in \mathbb{Z}^+.$$

A pesar de que la condición de que a y q son coprimos es menos natural en las sumas de Gauss generalizadas, la seguiremos manteniendo porque aparece de manera natural en su aplicación al efecto Talbot cuántico. Esta condición se aplica en toda la hoja.

En principio $G(a,b;q)$ admite una evaluación que esencialmente proviene de la de $G(a,q)$ y esta última de la de $G(1,q)$. Sin embargo, no hay una fórmula sencilla para tal evaluación de $G(a,b;q)$ pues requiere distinguir varios casos [7], [3, App. A]. La fórmula para $G(a,q)$ es mucho más simple ([7], [2, §11.3]), pero requiere consideraciones aritméticas sobre residuos cuadráticos. Tales consideraciones no aparecen en la evaluación de $G(1,q)$.

El plan en esta hoja es evaluar primero $\big|G(a,b;q)\big|$, que es muchísimo más sencillo que evaluar $G(a,b;q)$, y después proceder con $G(1;q)$ que constituirá el grueso de los ejercicios.

1) Justifica las igualdades

$$\big|G(a,b;q)\big|^2 = \sum_{m,n=1}^{q} e\Big(\frac{a(n^2-m^2)+b(n-m)}{q}\Big) = \sum_{n=1}^{q} e\Big(\frac{an^2+bn}{q}\Big)\sum_{m=1}^{q} e\Big(\frac{2amn}{q}\Big).$$

Indicación: Para la segunda, considera el cambio $n \mapsto n+m$ módulo q.

2) Demuestra que

$$\big|G(a,b;q)\big| = \begin{cases} \sqrt{q} & \text{si } 2\nmid q,\\ \frac{1+(-1)^{b+q/2}}{\sqrt{2}}\sqrt{q} & \text{si } 2 \mid q \end{cases}$$

y concluye que $G(a,b;q)$ se anula si y solo si $2b+q+2$ es múltiplo de 4.

La evaluación de $G(1;q)$ es mucho más profunda. Aquí la deduciremos de la sorprendente *identidad de Landsberg y Schaar*

$$\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{n=1}^{q} e\Big(\frac{pn^2}{q}\Big) = \frac{1+i}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{n=1}^{2p} e\Big(-\frac{qn^2}{4p}\Big) \qquad \text{para} \quad p,q \in \mathbb{Z}^+.$$

Nota que para p y q coprimos, el primer miembro es $G(p;q)/\sqrt{q}$. A pesar de que esta sea una identidad finita no se conocen pruebas simples. En [5] hay una con métodos elementales (sin derivadas e integrales), pero es muy larga. Aquí veremos una que requiere Cálculo I y un mínimo de análisis de Fourier (Ecuaciones en derivadas parciales o Variable real).

3) Suponiendo esta identidad, deduce la siguiente evaluación de $G(1;q)$:

$$G(1;q)=\begin{cases}(1+i)\sqrt{q} & \text{si } q\equiv 0 \pmod 4,\\ \sqrt{q} & \text{si } q\equiv 1 \pmod 4,\\ 0 & \text{si } q\equiv 2 \pmod 4,\\ i\sqrt{q} & \text{si } q\equiv 3 \pmod 4.\end{cases}$$

[Solo si sabes teoría de Galois] Como a y q son coprimos, $\zeta\mapsto\zeta^a$ induce un automorfismo σ en $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ donde $\zeta=e(1/q)$. Se cumple $G(a;q)=\sigma\big(g(1;Q)\big)$ y σ actúa en subcuerpos cuadráticos como la identidad o por conjugación (los únicos automorfismos allí), por tanto, la evaluación anterior también es válida para $G(a;q)$ salvo signos. Esto es, resulta en los diferentes casos $(\pm 1\pm i)\sqrt{q}$, $\pm\sqrt{q}$, $\pm\sqrt{q}$, 0 y $\pm i\sqrt{q}$. Son estos signos los que dependen de propiedades aritméticas de a que no analizaremos aquí.

Para deducir la identidad de Landsberg y Schaar partiremos de la siguiente identidad mucho más conocida y sencilla:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}=\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/t}\qquad \text{para}\quad t\in\mathbb{R}^+. \tag{1}$$

Aunque habitualmente se establece así, por continuación analítica (el principio de unicidad, pregúntame si no sabes de qué hablo), en realidad es válida para todo t complejo con $\Re(t)>0$ con la rama habitual de la raíz.

No sé si has visto (1) en algún curso de ecuaciones o análisis. Casi seguro que sí. Dejo a tu elección hacer el siguiente ejercicio, basado en series de Fourier, o sustituirlo por una referencia (por ejemplo a [4, Ex. 10.10]).

4) [Opcional] Sea $F(x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(m+x)^2 t}$. Como es 1-periódica y regular, admite un desarrollo de Fourier $F(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e(nx)$ con coeficientes $a_n=\int_{-1/2}^{1/2} F(x)e(-nx)\,dx$. Demuestra que se tiene $a_n=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t x^2}e(-nx)\,dx$ y deduce (1) calculando $F(0)$ y empleando la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}e(-yx)\,dx=e^{-\pi y^2}$. Si no te suena, mira [4, Ex. 10.9] o [6].

5) Cambiando t por $t-2ip/q$ en (1) prueba que para $p,q\in\mathbb{Z}^+$, $t>0$ y $t'=t/(t^2+4p^2/q^2)$ se cumple

$$1+2M_1=\frac{1+2M_2}{\sqrt{t-2ip/q}}\qquad\text{con}\quad M_1=\sum_{n=1}^{\infty} e\Big(\frac{pn^2}{q}\Big)e^{-\pi n^2 t},\quad M_2=\sum_{n=1}^{\infty} e\Big(-\frac{pn^2t'}{qt}\Big)e^{-\pi n^2 t'}.$$

6) Demuestra la identidad de Landsberg y Schaar suponiendo los límites

$$\lim_{t\to 0^+} \sqrt{t}M_1 = \frac{1}{2q}\sum_{n=1}^{q} e\Big(\frac{pn^2}{q}\Big) \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 0^+} \sqrt{t}M_2 = \frac{1}{2q}\sum_{n=1}^{2p} e\Big(-\frac{qn^2}{4p}\Big). \tag{2}$$

En [1] estos límites se mencionan sin prácticamente ninguna explicación. A mi juicio no son nada obvios y les dedico los tres últimos ejercicios. Si me estoy perdiendo algo y encuentras algún atajo, dímelo.

7) Prueba que para $t > 0$ y cualquier sucesión (compleja) acotada $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ se cumple $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\pi n^2 t} = 2\pi t \int_1^{\infty} x e^{-\pi t x^2} \sum_{1\le n\le x} b_n\, dx$ y deduce que si b_n es q-periódica ($b_n = b_{n+q}$) y $b_1 + b_2 + \cdots + b_q = 0$ entonces el módulo de la serie está acotado por $\max_{1\le m\le q} \big| \sum_{n=1}^{m} b_n \big|$. Indicación: Calcula la integral por separado en cada intervalo $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

8) Utilizando el ejercicio anterior, deduce que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada y q-periódica, la diferencia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\pi n^2 t} - S \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$ con $S = q^{-1}\sum_{n=1}^{q} a_n$ permanece acotada cuando $t \to 0^+$. Demuestra con esto y (1)

$$\lim_{t\to 0^+} \sqrt{t} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{2} S$$

y obtén el primer límite de (2).

9) Por el teorema del valor medio, $\big|f(t) - f(0)\big| \le 2t \max_{x\in[0,t]} \big|f'(x)\big|$ para $f : [0,t] \longrightarrow \mathbb{C}$ derivable. Aplicándolo a $f(t) = e\big(-pn^2/(qt^2 + 4p^2/q)\big)$, deduce

$$\Big| M_2 - \sum_{n=1}^{\infty} e\Big(-\frac{qn^2}{4p}\Big) e^{-\pi n^2 t} \Big| \le C \sum_{n=1}^{\infty} (nt')^2 e^{-\pi n^2 t'} \qquad \text{para} \quad 0 < t < 1$$

donde C es una expresión (que no hace falta hallar) independiente de t. El último sumatorio es $\sqrt{t'}$ veces una suma de Riemann de $\int_0^{\infty} x^2 e^{-\pi x^2}\, dx$ (¿lo ves? Considera $t' = 1/N^2$) y por tanto tiende a cero cuando $t \to 0^+$. Deduce el segundo límite de (2) aplicando el ejercicio anterior al primer sumatorio.

Tarea a entregar. Escribe un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. La extensión es libre, pero intenta sintetizar sobre todo no deteniéndote en cálculos rutinarios. El documento resultante conformará el tercer capítulo de tu TFG con el título *Sumas de Gauss*, o la variación que prefieras.

Referencias

[1] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals.* Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.

[2] E. Grosswald. *Representations of integers as sums of squares.* Springer-Verlag, New York, 1985.

[3] J. H. Hannay and M. V. Berry. Quantization of linear maps on a torus-Fresnel diffraction by a periodic grating. *Phys. D*, 1(3):267–290, 1980.

[4] H. L. Montgomery. *Early Fourier analysis*, volume 22 of *Pure and Applied Undergraduate Texts.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[5] B. Moore. A proof of the Landsberg-Schaar relation by finite methods. *Ramanujan J.*, 53(3):653–665, 2020.

[6] Pr∞fWiki contributors. Fourier Transform of Gaussian Function — Pr∞fWiki. `https://proofwiki.org/w/index.php?title=Fourier_Transform_of_Gaussian_Function&oldid=668452`, 2023. [Online; accessed 26-December-2023].

[7] Wikipedia contributors. Quadratic gauss sum — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quadratic_Gauss_sum&oldid=1180972803`, 2023. [Online; accessed 22-January-2024].