He estado pensando que el último apartado del plan original está un poco fuera de lugar. Teniendo en cuenta además que en la hoja anterior no llegamos a ver los dos tipos principales de difracción, sugiero que conformen un segundo capítulo conservando después esencialmente el resto de la propuesta inicial salvo el último epígrafe. Concretamente, la nueva propuesta de títulos aproximados es:

1. La teoría matemática de la difracción.
2. Difracción de Fraunhofer y de Fresnel.
3. Las sumas de Gauss.
4. El efecto Talbot clásico.
5. Resurgimiento cuántico.

Antes de entrar en los tipos de difracción del segundo punto, introduciremos una función compleja de variable real que aparecerá en ambos y también en la siguiente hoja. Definimos la *integral de Fresnel* como la función $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ dada por

$$F(x)=\int_0^x e(t^2)\,dt.$$

Por si consultas la literatura, dependiendo de los autores, es común también dar este nombre a $F$ tras un cambio lineal, sobre todo a $\int_0^x e(t^2/4)\,dt$, o a sus partes real e imaginaria.

Lo primero que vamos a hacer es mostrar

$$F(+\infty)=-F(-\infty)=\frac{1+i}{4}.$$

Aquí $F(\pm\infty)$ significa $\lim_{x\to\pm\infty}F(x)$. Es decir, la integral impropia en sentido de Riemann (en sentido Lebesgue no existe porque el integrando tiene módulo 1). La convergencia no es obvia en absoluto. En el siguiente ejercicio te propongo obtener la convergencia de $F(+\infty)$ a $(1+i)/4$ con un argumento de variable compleja. Si prefieres emplear en su lugar algún otro método que se te ocurra o que encuentres en alguna referencia, no hay problema en que lo sustituyas. La igualdad $F(+\infty)=-F(-\infty)$ se sigue porque $F$ es obviamente impar.

**1)** Para $x>0$, por la definición, $F(x)=\int_{\gamma_x}e(z^2)\,dz$ con $\gamma_x=\{0<\Re(z)<x,\ \Im(z)=0\}$ orientado hacia la derecha. Sea $\gamma_x^*$ este camino girado $\pi/4$ en sentido positivo. Usando el teorema de Cauchy, muestra $\int_{\gamma_x}e(z^2)\,dz-\int_{\gamma_x^*}e(z^2)\,dz\to 0$ cuando $x\to\infty$ y calcula el límite de la segunda integral a partir de la igualdad $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$, que debieras conocer.

Ahora vamos a encontrar una buena aproximación para $F(x)$ por funciones elementales cuando $x$ es grande. El punto de partida es

$$F(x)=\frac{1+i}{4}-\frac{1}{2}\int_{x^2}^{\infty}\frac{e(t)}{\sqrt{t}}\,dt\qquad\text{para } x>0.$$

**2)** Prueba la igualdad anterior e, integrando por partes dos veces, deduce para $x \neq 0$

$$F(x) = \frac{(1+i)x}{4|x|} - \frac{e(x^2)}{4\pi i x} + R(x) \qquad \text{con} \quad |R(x)| < \frac{1}{8\pi^2|x|^3}.$$

Indicación: ¿Por qué basta probarlo para $x > 0$?

**3)** Busca en *internet* "*Cornu spiral*", en particular su definición y gráfica, y escribe alguna línea acerca de ella y justificando su aspecto a la luz del resultado anterior.

En un ejemplo del primer tipo de difracción, para $x > 0$ grande tendremos que aproximar una integral oscilatoria de la forma

$$I(x) = \int_{-1/2}^{1/2} A(t)\, e\big(xB(t)\big)\, dt \qquad \text{con} \quad A, B \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ reales y 1-periódicas.}$$

Veamos la técnica general al uso y su relación con $F$.

Los físicos utilizan para estas y otras integrales lo que llaman *principio de fase estacionaria*, cuya idea intuitiva suena razonable: La contribución principal a $I(x)$ proviene de entornos de los valores críticos, $B'(t) = 0$, porque si $B'(t) \neq 0$ entonces en los alrededores de $t$ la función $e\big(xB(t)\big)$ oscilará mucho ($x$ es grande) y habrá mucha cancelación, mientras que si $B'(t) = 0$ entonces $B(t)$ será como una perturbación de una constante.

Esta idea se puede traducir en el siguiente enunciado matemático: Sea $\mathcal{C} = \big\{t_\nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] : B'(t_\nu) = 0\big\}$ el conjunto de valores críticos de $B$. Si $\mathcal{C}$ es finito, $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \notin \mathcal{C}$ y sus elementos son valores críticos no degenerados, $B''(t_\nu) \neq 0$, entonces para $x > 0$

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{t_\nu \in \mathcal{C}} \frac{(1 \pm i)A(t_\nu)\, e\big(xB(t_\nu)\big)}{\sqrt{\pm 2B''(t_\nu)}} + R(x) \qquad \text{con} \quad |R(x)| < \frac{K}{x^{3/2}} \tag{1}$$

donde $K$ es cierta constante que depende de $A$ y $B$ y $\pm$ indica el signo de $B''(t_\nu)$.

Aunque no veremos la prueba (si tienes curiosidad, en [4, §VIII.1] y [2, §7.7] hay resultados más generales), sí vamos a ver de dónde sale el sumatorio a la luz del principio de fase estacionaria. Según este y usando para $A$ y $B$ aproximaciones de Taylor de orden 0 y de orden 2, se debería tener para cierto $\delta > 0$

$$I(x) \approx \sum_{t_\nu \in \mathcal{C}} \int_{t_\nu - \delta}^{t_\nu + \delta} A(t)\, e\big(xB(t)\big)\, dt \approx \sum_{t_\nu \in \mathcal{C}} \int_{-\delta}^{\delta} A(t_\nu)\, e\Big(xB(t_\nu) + \frac{x}{2}B''(t_\nu)t^2\Big)\, dt.$$

**4)** Sea $x_\nu = \big|xB''(t_\nu)/2\big|^{1/2}$. Prueba que la última integral es exactamente $A(t_\nu)\, e\big(xB(t_\nu)\big)$ multiplicado por $2F(\delta x_\nu)/x_\nu$ si $B''(t_\nu) > 0$ y por $2\overline{F}(\delta x_\nu)/x_\nu$ si $B''(t_\nu) < 0$. Deduce de ello que multiplicando por $\sqrt{x}$ y tomando el límite $x \to +\infty$ se obtiene el sumatorio en (1).

Ahora analizaremos un ejemplo concreto que será útil en breve.

**5)** Utilizando (1), muestra que

$$h(x) = i\int_{-1/2}^{1/2} e\big(-x\,\mathrm{sen}(2\pi t)\big)\,\mathrm{sen}(2\pi t)\,dt \quad \text{verifica} \quad h(x) = \frac{\mathrm{sen}(2\pi x - \pi/4)}{\pi\sqrt{x}} + R(x)$$

con $x^{3/2}|R(x)|$ acotado.

**6)** Lee en [1] lo relativo a la *difracción de Fraunhofer*, esto es, desde la página 7 hasta el final y redáctalo con tus palabras salvo que en la aproximación de Taylor te podrás referir al último ejercicio de la hoja anterior y que en el segundo ejemplo (el del círculo), en vez de apelar a propiedades no probadas de funciones radiales y de Bessel, debes utilizar la combinación de los dos ejercicios siguientes.

**7)** Dado $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ sean $R$ y $\alpha_0$ su radio y su ángulo, es decir, $\xi_1 = R\cos\alpha_0$, $\xi_2 = R\,\mathrm{sen}\,\alpha_0$. Con el cambio de variable $x = r\,\mathrm{sen}(\theta + \alpha_0)$, $y = -r\cos(\theta + \alpha_0)$ y después con un cambio de polares a cartesianas, muestra que

$$\iint_D e(-\xi_1 x - \xi_2 y)\,dxdy = \int_0^\delta \int_0^{2\pi} r\,e(-rR\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta dr = \iint_D e(-Ry)\,dxdy$$

donde $D$ indica el disco centrado de radio $\delta$.

**8)** Efectuando la integral en $x$, haciendo el cambio de variable $y = \delta\,\mathrm{sen}(2\pi t)$ y, finalmente, integrando por partes tomando $u = \cos(2\pi t)$, prueba que la integral anterior es:

$$2\int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{\delta^2 - y^2}\,e(-Ry)\,dy = 2\pi\delta^2 \int_{-1/2}^{1/2} \cos^2(2\pi t)\,e\big(-R\delta\,\mathrm{sen}(2\pi t)\big)\,dt = \frac{\delta}{R}h(R\delta)$$

con $h$ la función que apareció en un ejercicio anterior. Es posible que inicialmente te parezca que en la segunda expresión están mal el coeficiente 2 y los límites. Son correctos. Piénsalo.

La *difracción de Fresnel* es más complicada, tanto teórica como experimentalmente, y no se expresa como una simple transformada de Fourier de la función característica de la apertura. Aquí, nos limitaremos a considerar un ejemplo, lo cual está más cerca de lo que hizo en realidad A.-J. Fresnel [3, §3.1], quien estudió la gran precisión con que su modelo teórico se ajustaba al experimento en este ejemplo.

Antes de comenzar, con un giro y una traslación del sistema de referencia siempre se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\mathbf{p}$ está "arriba", $\mathbf{q}$ "abajo" (como en los dibujos de [1]) y ambos en el plano $XZ$. Es decir, supondremos en lo sucesivo

$$(2) \qquad p_3 > 0, \qquad q_3 < 0 \qquad \text{y} \qquad p_2 = q_2 = 0.$$

A modo de motivación del ejemplo, pensemos que cualquier curva regular se aproxima por rectas, entonces parece que nos puede dar una idea aproximada general de los fenómenos de difracción el estudio de una apertura cuyo borde sea una línea recta, esto es, con la notación de [1], el caso en que $\mathcal{A}$ es un semiplano. Concretamente, consideramos

$$\mathcal{A} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x<0,\ z=0\big\}.$$

Por tanto $A = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$.

Para llegar a la fórmula (6) de [1] se había hecho la hipótesis de que $A$ tenía un tamaño reducido, lo cual ahora es radicalmente falso. Sin embargo, las consideraciones con respecto al ángulo y a sustituir en (5) el paréntesis grande por $-2\cos\beta$ son correctas si limitamos la $\mathbf{x}$ a un entorno del punto $\mathbf{m} = (m,0,0)$ en la intersección del plano $z=0$ con la línea que une $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ (te recomiendo que te hagas un dibujo o que mires la figura 3.2 de [3], donde se llama $\overline{x}$ a $\mathbf{m}$ y $-R$ a $m$). En ese caso, $\beta$ es exactamente el ángulo formado por $\mathbf{p}-\mathbf{q}$ y $(0,0,1)$ y las aproximaciones correctas de $\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|$ y de $\|\mathbf{x}-\mathbf{q}\|$ son $\|\mathbf{m}-\mathbf{p}\|$ y $\|\mathbf{m}-\mathbf{q}\|$. En definitiva, en lugar de (6), en este caso tendremos:

$$U(\mathbf{q}) = \frac{K\cos\beta}{\lambda\|\mathbf{p_m}\|\|\mathbf{q_m}\|}\iint_{\mathcal{U}} e\big(k\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| + k\|\mathbf{x}-\mathbf{q}\|\big)\,dxdy \qquad \text{con} \quad \mathbf{p_m} = \mathbf{m}-\mathbf{p},\ \mathbf{q_m} = \mathbf{m}-\mathbf{q}$$

y donde $\mathcal{U}$ es un entorno[1] de $\mathbf{m}$ en $A$.

En lo sucesivo supondremos $k>0$ y por tanto, $k=\lambda^{-1}$. Esto no es importante, ya que cambiar de signo únicamente conjuga el resultado.

Ahora hay que llevar a cabo la aproximación cuadrática de la fase $k\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|+k\|\mathbf{x}-\mathbf{q}\|$, que es lo que caracteriza a la difracción de Fresnel. La sustituimos, por tanto, por su polinomio de Taylor de grado 2 alrededor de $\mathbf{m}$ (no tendría sentido hacerlo alrededor del origen).

**9)** Con el último ejercicio de la hoja anterior y recordando las hipótesis (2), demuestra que el polinomio de Taylor de grado 2 de $\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| + \|\mathbf{x}-\mathbf{q}\|$ alrededor de $\mathbf{m}$ evaluado en $\mathbf{x} = (x,y,0) \in \mathcal{U}$ es

$$\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\| + \frac{\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|}{2\|\mathbf{p_m}\|\|\mathbf{q_m}\|}\big((x-m)^2\cos^2\beta + y^2\big).$$

Indicación: Si has entendido la geometría de la situación, deberías ver claro que $\|\mathbf{p_m}\|+\|\mathbf{q_m}\| = \|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|$ y que $\cos\beta = p_3/\|\mathbf{p_m}\| = -q_3/\|\mathbf{q_m}\|$. Por si lo quieres pensar, la ausencia de términos lineales se puede deducir antes de comenzar, sin un solo cálculo.

Después de esta aproximación, debemos integrar en un entorno de $(m,0)$, pero el principio de fase estacionaria sugiere que la contribución fuera de ese entorno es poco relevante (porque

[1] En realidad, mejor hay que entender "la parte de un entorno de $\mathbf{m}$ en $A$" (o con más propiedad, la intersección de un entorno de $\mathbf{m}$ con $\mathcal{A}$) porque al final no descartaremos que $\mathbf{m}$ corresponda a un $\mathbf{q}$ ligeramente en la zona de sombra, es decir, $\mathbf{m} \notin A$ cercano al borde. El modelo dará un resultado cualitativamente coherente incluso sin esta condición de cercanía.

allí la derivada de $(x-m)^2$ o de $y^2$ están lejos de anularse). Sin entrar en una justificación matemática más precisa, reemplazamos entonces $\mathcal{U}$ por $A$, obteniéndose

$$U(\mathbf{q}) = \frac{K\, e\big(k\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|\big)\cos\beta}{\lambda\|\mathbf{p_m}\|\|\mathbf{q_m}\|}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} e\Big(\frac{\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|}{2\lambda\|\mathbf{p_m}\|\|\mathbf{q_m}\|}\big((x-m)^2\cos^2\beta+y^2\big)\Big)\,dxdy.$$

**10)** Mediante un cambio de variable adecuado, demuestra que la integral doble es igual a

$$\big((2+2i)F(-mw)+i\big)\frac{\cos\beta}{4w^2} \qquad \text{con} \quad w=\sqrt{\frac{\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|\cos^2\beta}{2\lambda\|\mathbf{p_m}\|\|\mathbf{q_m}\|}}.$$

**11)** La intensidad $\big|U(\mathbf{q})\big|^2$ es lo que realmente se mide en los experimentos. Comprueba que la aproximación anterior da

$$\big|U(\mathbf{q})\big|^2 \approx \frac{K^2H(-mw)}{2\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|^2} \qquad \text{donde} \quad H(x)=\Big|2F(x)+\frac{1+i}{2}\Big|^2.$$

**12)** Utilizando las aproximaciones que habíamos hecho de $F$, deduce que $H(x)$ para $|x|$ grande se comporta como $(2\pi x)^{-2}$ si $x$ es negativo y como $2\big|1+\frac{1+i}{4\pi x}e(x^2)\big|^2$ si es positivo. Explica que de ello se deduce que, cuando $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ no están muy alejados y $\mathbf{p}-\mathbf{q}$ no es muy horizontal, cerca del borde del semiplano en la zona de luz a distancias mayores que $\lambda^{-1/2}$ debemos observar unas oscilaciones cuadráticas que se atenúan rápidamente mientras que en la zona de sombra no las observamos. Por otro lado, a distancias menores que $\lambda^{-1/2}$, la aproximación de Taylor $F(x)\approx x$ para $x$ pequeño, que da $H(x)\approx 1/2+2x$, implica una variación lineal de la penumbra. Compara el resultado con el dibujo de [5] que es la gráfica de $H(x)$ salvo un cambio de escala del eje $X$. Quizá también te resulte ilustrativo recordar lo que has mirado de la espiral de Cornu.

---

**Tarea a entregar.** Debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. La extensión es libre intentando no superar las 7 páginas con el formato de esta hoja o de la plantilla. La siguiente hoja será mucho más breve, pero no lo emplees como excusa para escribir demasiado. Trata de no explicitar demasiado los cálculos mecánicos y tediosos, simplemente indícalos, aunque la solución de algunos ejercicios solo quede esbozada. El documento resultante conformará el segundo capítulo de tu TFG bajo el título antes sugerido, *Difracción de Fraunhofer y de Fresnel*, o la variación que prefieras.

---

## Referencias

[1] F. Chamizo. Matemáticas de la difracción y su interpretación física. `https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/difraction.pdf`, 2013.

[2] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I*, volume 256 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990. Distribution theory and Fourier analysis.

[3] A. Komech and A. Merzon. *Stationary diffraction by wedges*, volume 2249 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Cham, 2019. Method of automorphic functions on complex characteristics.

[4] E. M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of T. S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.

[5] Wikimedia Commons. File:fresnelintegral-4.svg — wikimedia commons, the free media repository. `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Fresnelintegral-4.svg&oldid=528831499`, 2021. [Online; accessed 12-November-2023].