Esta hoja está dedicada a obtener fórmulas exactas en términos de divisores para el número de representaciones como suma de 2, 4 y 8 cuadrados. Utilizaremos la fórmula de valencia para $\Gamma_\theta$, ligeramente más simple que la de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, que afirma que una forma modular $f$ no idénticamente nula de peso $k$ con respecto al grupo $\Gamma_\theta$ sin sistema de multiplicadores ($w_\gamma = 1$) satisface

$$\frac{1}{2}n_i(f) + n_\infty(f) + n_1(f) + \sum_z{}' n_z(f) = \frac{k}{4}. \tag{1}$$

La prueba es casi idéntica a la relativa a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, pero las definiciones de $n_\infty(f)$ y de $n_1(f)$, el orden de anulación en las cúspides, es un poco extraña a primera vista. Concretamente, se definen como los enteros no negativos que cumplen que

$$\lim_{\Im(z)\to+\infty} f(z)\, e\Big(-\frac{zn_\infty(f)}{2}\Big) \qquad \text{y} \qquad \lim_{\Im(z)\to+\infty} j_{\gamma_1}^{-k}(z) f(\gamma_1 z)\, e\big(-zn_1(f)\big) \quad \text{con } \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

existen y son no nulos. Te cuento un poco la motivación para que veas que estas definiciones generalizan la de $n_\infty(f)$ para $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Las formas modulares con respecto a $\Gamma_\theta$ son 2-periódicas en vez de 1-periódicas (porque $T^2 \in \Gamma_\theta$ y $T \notin \Gamma_\theta$), así que tendrán un desarrollo de Fourier del tipo $\sum_{n=0}^\infty a_n e(nz/2)$ y el menor $n$ con $a_n \neq 0$ es justamente lo que pide de una forma indirecta la definición anterior. En el caso de la cúspide 1, se utiliza $\gamma_1 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ como en la hoja anterior para llevarla a $\infty$ y resulta que $j_{\gamma_1}^{-k}(z) f(\gamma_1 z)$ es una función 1-periódica. Admitirá, por tanto, un desarrollo $\sum_{n=0}^\infty a_n e(nz)$ y, de nuevo, la definición anterior da el menor $n$ con $a_n \neq 0$.

Es importante notar que se pide que $f$ sea forma modular pues (1) no se aplica a funciones débilmente modulares. Es decir, se debe satisfacer la condición de crecimiento que en el caso de $\Gamma_\theta$ es $\big|f(z)|\Im(z)^{-\alpha} \to 0$ (cúspide $\infty$) y $\big|j_{\gamma_1}^{-k}(z) f(z)|\Im(z)^{-\alpha} \to 0$ (cúspide 1) para algún $\alpha > 0$ cuando $\Im(z) \to +\infty$. Sin estas condiciones, $n_\infty(f)$ y $n_1(f)$ no están bien definidos en general. La fórmula tampoco es válida si hay sistemas de multiplicadores no triviales.

**1)** Con lo que aprendiste en la hoja anterior, halla $n_\infty(f)$ y $n_1(f)$ para $f = G_{\theta,4}^2$. Deduce de la fórmula de valencia (¿ves claro que cumple las hipótesis?) que $G_{\theta,4}(z) \neq 0$ para $z \in \mathbb{H}$.

**2)** Demuestra que $\theta^8(z)/G_{\theta,4}(z)$ es forma modular de peso cero con respecto al grupo $\Gamma_\theta$ y deduce que es una constante. Indicación: Si $f(z)$ es una forma modular de peso cero, $f(z) - f(i)$ también lo es y (1) implica $f(z) = f(i)$.

**3)** Comparando los valores de $\theta^8(i\infty)$ y de $G_{\theta,4}(i\infty)$, deduce la sorprendente relación $\theta^8(z) = 48\pi^{-4} G_{\theta,4}(z)$ y al igualar los coeficientes de Fourier, obtén la fórmula

$$r_8(n) = 16n^3 \sum_{d|n,\ 2\nmid d} d^{-3} + 16n^3 \sum_{d|n,\ 2|d} (-1)^{n/d} d^{-3} \qquad \text{para} \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Aquí y en toda la hoja, como es habitual e hicimos en la hoja anterior, solo consideramos los divisores positivos.

A pesar de que el siguiente ejercicio solo requiere argumentos elementales, te puede costar dependiendo de tus habilidades con la teoría de números.

**4)** Simplifica la fórmula anterior para obtener

$$r_8(n) = 16 \sum_{d|n} (-1)^{n+d} d^3.$$

Si quieres, como ejemplo, halla $r_8(1111)$ que sería imposible de calcular a mano.

La relación $\theta^8(z) = 48\pi^{-4} G_{\theta,4}(z)$ implica la no anulación de $\theta(z)$ en $\mathbb{H}$ a partir de la de $G_{\theta,4}(z)$. Teniendo esto en cuenta, procedamos de una manera parecida para deducir una fórmula para el caso de cuatro cuadrados.

**5)** Explica siguiendo las mismas líneas que antes que $G_{\theta,2}(z)/\theta^4(z)$ es una forma modular de peso cero con respecto al grupo $\Gamma_\theta$ y acotada. Con el auxilio de los valores en el infinito, obtén la identidad $\theta^4(z) = 4\pi^{-2} G_{\theta,2}(z)$.

**6)** Comparando los coeficientes de Fourier, muestra como antes

$$r_4(n) = 8n \sum_{d|n,\ 2\nmid d} d^{-1} - 8n \sum_{d|n,\ 2|d} (-1)^{n/d} d^{-1} \qquad \text{para} \quad n > 0.$$

De nuevo, el siguiente ejercicio de naturaleza “elemental” te puede costar. Si la indicación te despista, olvídala. Un corolario es el famoso teorema de Lagrange que afirma que todo entero positivo es suma de cuatro cuadrados (hay pruebas [3, §7.3] sin usar $r_4$).

**7)** Simplifica la fórmula a

$$r_4(n) = 8 \sum_{d|n,\ 4\nmid d} d.$$

Indicación: En $\sum_{d|n,\,4|d} d$ se puede sustituir $n$ por $2n$ añadiendo la condición $2 \mid 2n/d$. Tras el cambio $d \mapsto 2d$ se obtiene $2\sum'_{2|d} d = \sum' \big(1 + (-1)^d\big) d$ donde la prima indica que la suma está restringida a $d \mid n$ con $n/d$ par.

Si ahora queremos hacer un razonamiento similar para encontrar una fórmula para la suma de dos cuadrados, nos encontramos con un problema, $\theta^2$ es de peso 1 y no se ajusta al peso de ninguna $G_{\theta,2k}$. Olvidándonos de que $k \in \mathbb{Z}^+$, correspondería a $k = 1/2$ que produce una serie divergente. Siguiendo en parte [2] vamos a construir un suplente de esta serie de Eisenstein que nos falta. La idea subyacente es que, aunque no exista $G_{\theta,1}$, al sustituir formalmente $k = 1/2$ en el desarrollo de Fourier de $G_{\theta,2k}$ hallado en la hoja anterior, se obtiene algo con sentido.

La función suplente admite una expresión sorprendentemente sencilla:

$$G(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sec(n\pi z).$$

**8)** Demuestra que

$$G(z)=1+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e(nz/2)}{1+e(nz)}=1+4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{2d+1|n}(-1)^d e(nz/2).$$

En particular, $G(i\infty)=1$.

La prueba de que $G(z)$ satisface una relación modular es similar a la empleada para $\theta$ en la hoja anterior (y se puede abreviar igualmente conociendo la fórmula de sumación de Poisson). Consideramos $z=it$ con $t>0$ y definimos $F(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\operatorname{sech}\big(\pi t(n+x)\big)$, donde $\operatorname{sech}=1/\cosh$, que es 1-periódica. Sus coeficientes de Fourier son:

$$a_n=\int_{-1/2}^{1/2}F(x)e(-nx)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2\pi nx)}{\cosh(\pi tx)}\,dx=t^{-1}\operatorname{sech}(\pi n/t)$$

donde la última igualdad viene de la integral $\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}(\pi x)\cos(2\pi\xi x)\,dx=\operatorname{sech}(\pi\xi)$ que es bastante conocida. Si quieres ver una prueba, está por ejemplo en [1].

**9)** Repasando lo hecho en la hoja anterior, evalúa $F(0)$ de dos formas distintas para obtener $G(-1/z)=-izG(z)$.

**10)** Calculando $F(1/2)$, obtén de la misma forma $G(\gamma_1 z)=-iz\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sec\big(\pi(n+1/2)z\big)$ de donde $e(-z/4)G(\gamma_1 z)/z\to -4i$ para $\Im(z)\to+\infty$.

**11)** Siguiendo las líneas de lo hecho en ejercicios anteriores para $r_4$ y $r_8$, demuestra la identidad $\theta^2(z)=G(z)$ y deduce la fórmula

$$r_2(n)=4\sum_{2d+1|n}(-1)^d.$$

**12)** [Opcional] Escribe todas las representaciones de 90 como suma de dos cuadrados, cuéntalas y comprueba que el resultado es coherente con la fórmula anterior.

El cabo suelto que nos queda es mostrar (1). Como te he dicho, la prueba es prácticamente igual que la del caso $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. La novedad es que hay que evitar las cúspides equivalentes 1 y $-1$, "mordiendo" un poco el dominio fundamental. A cambio no hay problemas en $(-1\pm i\sqrt{2})/2$. Esto es, se aplica el principio del argumento en

$$\mathcal{D}_{\theta,\epsilon}=\mathcal{D}_\theta\cap\big\{\Im(z)\le\epsilon^{-1}\big\}\cap\big\{|z+1-i\epsilon/2|\ge\epsilon/2\big\}\cap\big\{|z-1-i\epsilon/2|\ge\epsilon/2\big\}$$

salvo evitar posibles ceros en la frontera. Nota que lo he escrito de forma que la imagen por $\gamma_1$ de $\Im(z)\ge\epsilon^{-1}$ dé el último término y el penúltimo sea la imagen por $T^{-1}\gamma_1$, ahora verás por qué.

Para integrar en la frontera recta superior se emplea el desarrollo en el infinito $f(z) = \sum_{n=n_\infty(f)}^{\infty} a_n e(nz/2)$ y en el arco de círculo cerca de 1 el argumento es similar tras un cambio $z \mapsto \gamma_1^{-1} z$ que pasa la integral en el arco de círculo a una integral en un segmento de $\Im(z) = \epsilon^{-1}$. Concretamente en el segmento une $\frac{1}{2} + i\epsilon^{-1}$ con $i\epsilon^{-1}$ y al considerar también la cúspide $-1$ se completa con el que une este último punto con $-\frac{1}{2} + i\epsilon^{-1}$. Recuerda que, como te he dicho al principio, $j_{\gamma_1}^{-k}(z) f(\gamma_1 z)$ es 1-periódica y entonces tiene un desarrollo $\sum_{n=n_1(f)}^{\infty} a_n e(nz)$, gracias a ello podemos hacer la integral como antes. El hecho de que sea 1-periódica viene de que, empleando $\gamma_1 T \gamma_1^{-1} \in \Gamma_\theta$, se tiene la cadena de igualdades:

$$j_{\gamma_1}^{-k}(Tz) f(\gamma_1 Tz) = j_{\gamma_1}^{-k}(Tz) f(\gamma_1 T \gamma_1^{-1} \gamma_1 z) = j_{\gamma_1}^{-k}(Tz) j_{\gamma_1 T \gamma_1^{-1}}^{k}(\gamma_1 z) f(\gamma_1 z) = j_{\gamma_1}^{-k}(z) f(\gamma_1 z).$$

**13)** Escribe algo breve acerca de la prueba de (1), sin dar detalles, mencionando que es similar al caso de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Solo explica con un poco más de cuidado lo que ocurre en las nuevas cúspides $-1$ y 1.

---

**Tarea a entregar.** Escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. De nuevo, trata no superar las 7 páginas con el formato de esta hoja o de la plantilla. Intenta no repetir los mismos detalles una y otra vez. Piensa que la evaluación de $r_2$, $r_4$ y $r_8$ que hemos visto aquí se rige por un mismo esquema general y tu documento debería transmitir esa estructura unificada. No es conveniente que especifiques todos los cálculos, sobre todo si son rutinarios. El documento debe dar lugar a un cuarto capítulo de tu TFG llamado *Representaciones como suma de 2, 4 y 8 cuadrados* o la variante que se te ocurra.

---

## Referencias


[1] P. Garrett. Fourier transform of sech. `https://www-users.cse.umn.edu/~garrett/m/real/notes_2019-20/08e_Fourier_transform_sech.pdf`, 2022.

[2] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[3] I. Stewart and D. Tall. *Algebraic number theory and Fermat's last theorem*. CRC Press, Boca Raton, FL, fourth edition, 2016.