Antes de comenzar, vamos a completar la tarea que faltaba de la hoja 1 en una versión ligeramente más concreta. Estos tres primeros ejercicios con una numeración separada, debieran pasar a formar parte del primer capítulo.

**1)** Utilizando los ejercicios 9 y 11 de la hoja 1 y las identidades matriciales $ST\gamma_0 = \gamma_0 ST$ y $S\gamma_0 = \gamma_0 \left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right) TS$, prueba la descomposición en cogrupos

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma_\theta \cup \Gamma_\theta T \cup \Gamma_\theta TS.$$

**2)** Explica que $\mathcal{D} \cup T\mathcal{D} \cup TS\mathcal{D}$ es dominio fundamental de $\Gamma_\theta$ con $\mathcal{D}$ el habitual de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Justifica brevemente, con lo que sabes de transformar rectas y semicircunferencias, que este dominio es $\mathbb{H} \cap \big\{ -1/2 \le \Re(z) \le 3/2 \big\} \cap \big\{ |z| \ge 1 \big\} \cap \big\{ |z-2| \ge 1 \big\}$.

**3)** Aplica $T^{-2}$, que está en $\Gamma_\theta$, a la zona en $\Re(z) \ge 1$ de este conjunto para concluir que

$$\mathcal{D}_\theta = \big\{ z \in \mathbb{H} \,:\, |\Re(z)| \le 1,\ |z| \ge 1 \big\}$$

es dominio fundamental de $\Gamma_\theta$.

---

Comenzamos ahora la nueva hoja propiamente dicha. La protagonista principal es una función que no satisface exactamente lo exigido en nuestra definición de forma modular. Históricamente surgió primero por su relación directa con las integrales elípticas. En tu trabajo, lo fundamental es su conexión con el número de representaciones como suma de cuadrados.

La función a la que se refiere el párrafo anterior es la *función theta*[1]

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e(n^2 z/2) \tag{1}$$

que es holomorfa y 2-periódica en $\mathbb{H}$. Debiera resultarte fácil ver que para $k \in \mathbb{Z}^+$

$$\theta^k(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) e(nz/2)$$

donde $r_k$ es la función número de representaciones como suma de cuadrados

$$r_k(n) = \#\big\{ (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k \,:\, n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_k^2 = n \big\}.$$

Tu TFG tiene mucho que ver con que la teoría de formas modulares permite deducir resultados sobre los coeficientes de Fourier de $\theta^k$ que son los $r_k(n)$.

[1] Parece más natural eliminar el denominador 2, que viene de trabajos clásicos, para que sea 1-periódica y algunos autores modernos lo hacen [6]. Prefiero que respetemos la mayoría de las referencias sobre sumas de cuadrados. Quitar el 2 conlleva cambiar el grupo $\Gamma_\theta$ de la primera hoja por otro.

Con la notación de la primera hoja, es obvio que $\theta$ es invariante por $T^2$. Lo que vamos a probar es que bajo $S$ se transforma como una hipotética forma modular de peso $1/2$ salvo una constante multiplicativa:

$$\theta(Sz) = \sqrt{z/i}\,\theta(z) \qquad \text{para} \quad z \in \mathbb{H} \tag{2}$$

donde la determinación del argumento de la raíz cuadrada es la habitual (positiva en $\mathbb{R}^+$). Esta relación es una consecuencia bastante directa de la llamada *fórmula de sumación de Poisson*. En caso de que conozcas esta fórmula, puedes reemplazar el segundo ejercicio por una aplicación de ella incluyendo alguna referencia (por ejemplo [1], [3]), si así lo prefieres. Lo hagas como lo hagas, doy por hecho que conoces la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\cos(2\pi xy)\,dx = e^{-\pi y^2}$. Hay una prueba detallada en [5].

**1)** Explica por qué es suficiente demostrar (2) para $z = it$ con $t \in \mathbb{R}^+$.

**2)** Dado $t > 0$, considera $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t(n+x)^2}$, que es 1-periódica. Justifica el siguiente cálculo de sus coeficientes de Fourier:

$$a_n = \int_{-1/2}^{1/2} F(x)e(-nx)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t x^2}\cos(2\pi nx)\,dx = t^{-1/2}e^{-\pi n^2/t}$$

y, evaluando $F(0)$ directamente y con su desarrollo de Fourier (recuerda la fórmula 7 de la hoja anterior), deduce (2) para $z = it$.

Examinemos más de cerca la relación con las formas modulares.

**3)** Para $k \in \mathbb{Z}^+$, muestra que $\theta^{8k}(\gamma z) = j_\gamma^{4k}(z)\,\theta^{8k}(z)$ para $\gamma \in \langle S, T^2\rangle$. Esto es, $\theta^{8k}$ satisface la misma relación que una función modular de peso $4k$ cambiando $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ por el subgrupo generado por $S$ y $T^2$. Indicación: Recuerda o aprende que $j_{\gamma_1}(\gamma_2 z)j_{\gamma_2}(z) = j_{\gamma_1\gamma_2}(z)$.

Habitualmente se siguen llamando *funciones modulares* a las funciones modulares con respecto a subgrupos de índice finito de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Enseguida veremos por qué $\langle S, T^2\rangle$ lo es y así se tiene que $\theta^{8k}$ es una función modular de peso $4k$ con respecto a este grupo.

El mismo argumento con el que has resuelto el ejercicio anterior muestra

$$\theta(\gamma z) = w_\gamma j_\gamma^{1/2}(z)\theta(z)$$

para cierta raíz octava de la unidad $w_\gamma$ que depende de $\gamma$ de una forma indeterminada. Factores constantes de módulo 1 de este tipo se dice que son *sistemas de multiplicadores* y así se dice que $\theta$ es una función modular de peso $1/2$ con respecto al grupo $\langle S, T^2\rangle$ con sistema de multiplicadores $w_\gamma$. Hay una fórmula algo complicada y más o menos compacta para $w_\gamma$ (si tienes curiosidad está en [2, Prop. 2.3.3] y [4, §11.7]) que involucra residuos cuadráticos. Sin embargo, $w_\gamma^2$ se simplifica bastante y los residuos cuadráticos desaparecen, lo que causa que el estudio de $r_k(n)$ sea muy diferente para $k$ impar y para $k$ par. En tu trabajo solo estudiaremos el segundo caso, con simplificaciones cuando $8 \mid k$ y $4 \mid k$ (nota que $w_\gamma^8 = 1$ y $w_\gamma^4$ es un signo). Seguro que no necesitaremos la fórmula para $w_\gamma$. Ni siquiera creo que usemos la de $w_\gamma^2$, al menos con el plan que tengo a día de hoy.

Dedicaremos los tres ejercicios siguientes a justificar

$$\Gamma_\theta = \langle S, T^2 \rangle.$$

Así $\langle S, T^2\rangle$ tiene índice finito, igual a 3, en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. El primer ejercicio debería ser una consecuencia fácil y rápida de lo que sabes de la primera hoja.

**4)** Sea $\gamma \in \Gamma_\theta$, explica por qué $\gamma = T^{a_1} S T^{a_2} S \cdots S T^{a_n} S$ para ciertos $a_j \in \mathbb{Z}$. Explica también por qué basta probar $\gamma \in \langle S, T^2\rangle$, esto es, $\Gamma_\theta \subset \langle S, T^2\rangle$.

Si todos los $a_j$ son pares, no hay nada que probar. En otro caso, sea $m$ el menor entero con $a_m$ impar. Utilizando la relación $SU = T^{-1}S$ donde $U = T^t$, se deduce

$$\gamma = T^{a_1} S \cdots T^{a_{m-1}} S T^{1+a_m} S U T^{a_{m+1}} S \cdots T^{a_n} S,$$

consiguiendo así que $1 + a_m$ sea par.

**5)** Con un razonamiento inductivo basado en $UT^{\pm 1} = (T^2 S)^{\mp 1} U$ y en $US = ST^{-1}$, muestra que o bien $\gamma \in \langle S, T^2\rangle$ o bien $\gamma \in \langle S, T^2\rangle TS$ o bien $\gamma \in \langle S, T^2\rangle T$. Indicación: De las relaciones se sigue $UT^{a_k} S = (T^2 S)^{-a_k} S T^{-1}$.

**6)** Deduce que la descomposición de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ en cogrupos de $\Gamma_\theta$, vista en la tarea atrasada, impide las dos últimas posibilidades porque $\gamma \in \Gamma_\theta$.

A continuación vamos a introducir una variante de las series de Eisenstein que comparte propiedades con $\theta^{4k}$. Definimos para $k \in \mathbb{Z}^+$

$$G_{\theta,2k}(z) = \sum_{2\nmid c+d}\sum \frac{(-1)^{kc}}{(cz+d)^{2k}} \qquad \text{donde } c \text{ y } d \text{ recorren los enteros.}$$

Si $k = 1$ hay un problema técnico y es que la serie no es absolutamente convergente y habría que justificar que los dos posibles órdenes de sumación en $c$ y $d$ dan el mismo resultado[2]. Sugiero que en tu TFG simplemente menciones la situación y digas que el problema no aparece gracias a la cancelación inducida por $(-1)^c$, sin más explicaciones. Si quieres que incluyamos una prueba en un apéndice, lo haremos más adelante.

**7)** Demuestra que $G_{\theta,2k}(T^2 z) = G_{\theta,2k}(z)$ y $G_{\theta,2k}(Sz) = (-1)^k z^{2k} G_{\theta,2k}(z)$.

Por tanto, con la terminología anterior, tanto $\theta^{4k}$ como $G_{\theta,2k}(z)$ son funciones modulares de peso $2k$ con respecto a $\Gamma_\theta$ con un sistema de multiplicadores que viene dado por un signo.

[2] Esto no es una exageración del rigor. De hecho, ocurre en $G_2$ y causa que no sea modular [6, §2.3].

Las funciones $G_{\theta,2k}(z)$ admiten un desarrollo de Fourier parecido al de $G_{2k}(z)$ que veremos a continuación.

**8)** Justifica la igualdad (quizá prefieras escribir $c$ en lugar de $d$)

$$2^{2k-1}\big(G_{\theta,2k}(z)-a_0\big)=(-1)^k\sum_{d=1,\,2\nmid d}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(dz/2+n)^{2k}}+\sum_{d=1,\,2\mid d}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(dz/2+1/2+n)^{2k}}$$

donde $a_0=\sum_{m\in\mathbb{Z}}(2m+1)^{-2k}=2\zeta(2k)\big(1-2^{-2k}\big)$. Este término corresponde a la contribución de $c=0$ en la definición original.

**9)** Aplica la identidad $(2k-1)!\sum_{n\in\mathbb{Z}}(w+n)^{-2k}=(2\pi i)^{2k}\sum_{m=1}^{\infty}m^{2k-1}e(mw)$, que conoces del desarrollo de Fourier de $G_{2k}$, en los sumatorios interiores y deduce de ello el desarrollo

$$G_{\theta,2k}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e(nz/2) \tag{3}$$

donde $a_0$ es como antes y

$$a_n=\frac{2\pi^{2k}n^{2k-1}}{(2k-1)!}\Bigg(\sum_{d\mid n,\ 2\nmid d}d^{1-2k}+\sum_{d\mid n,\ 2\mid d}(-1)^{k+n/d}d^{1-2k}\Bigg)\qquad\text{para}\quad n>0.$$

Para subgrupos de índice finito de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ se llaman *cúspides* a los puntos de un dominio fundamental (cerrado) $F$ que están en el "borde" de $\mathbb{H}$. Esto es, a $i\infty$ (si está en $F$) y a los elementos de $F\cap\mathbb{R}$. Hay una condición de crecimiento generalizada para funciones modulares de peso $k$ que pide que en cada cúspide $\mathfrak{a}$ se cumpla $\big|j_{\gamma_\mathfrak{a}}^{-k}(x+iy)f\big(\gamma_\mathfrak{a}(x+iy)\big)\big|y^{-\alpha}\to 0$ cuando $y\to+\infty$ para algún $\alpha>0$ y $\gamma_\mathfrak{a}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tal que $\gamma_\mathfrak{a}(i\infty)=\mathfrak{a}$. La idea es que estudiar $f$ cerca de $\mathfrak{a}$ es lo mismo que estudiar $f\circ\gamma_\mathfrak{a}$ cerca de $i\infty$ unificando así las condiciones en todos los puntos que escapan de $\mathbb{H}$ porque $\gamma_{i\infty}=\mathrm{Id}$. Como en el caso de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, las funciones modulares que satisfacen la condición generalizada, se dice que son *formas modulares.*

Independientemente de que deseemos asignar el calificativo "forma modular" a nuestras funciones $\theta$ y $G_{\theta,2k}$, en el resto del trabajo será importante el comportamiento cerca de las cúspides y esta es la tarea en la que nos embarcamos en el resto de los problemas.

Recordemos el dominio fundamental $\mathcal{D}_\theta$. Las cúspides son $i\infty$, $1$ y $-1$. Como $T^2(-1)=1$, nos podemos quedar con $1$ descartando $-1$. El comportamiento en $i\infty$ de $\theta$ y $G_{\theta,2k}$ es inmediato a partir de sus desarrollos de Fourier (1) y (3). Se tiene

$$\lim_{\Im(z)\to+\infty}\theta(z)=1\qquad\text{y}\qquad\lim_{\Im(z)\to+\infty}G_{\theta,2k}(z)=a_0=2\zeta(2k)\big(1-2^{-2k}\big).$$

Definiendo $\gamma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ se cumple $\gamma_1(i\infty) = 1$ y, siguiendo la filosofía anterior, para estudiar nuestras funciones cerca de 1 las evaluamos en $\gamma_1(z)$ con $\Im(z) \to +\infty$.

**10)** Con la ayuda de (2), demuestra $\theta(\gamma_1 z) = \big(\theta(z/4) - \theta(z)\big)\sqrt{z/i}$.

**11)** Concluye a partir de ello y de (1)

$$\lim_{\Im(z)\to+\infty} \frac{e(-z/8)\theta(\gamma_1 z)}{\sqrt{z/i}} = 2.$$

Vamos ahora con $G_{\theta,2k}$. Las siguientes igualdades deberían resultar evidentes. Si no es así, incluye las explicaciones que necesites:

$$z^{-2k} G_{\theta,2k}(\gamma_1 z) = \sum_{2\nmid c+d}\sum \frac{(-1)^{kc}}{\big((c+d)z - c\big)^{2k}} = 2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{nk}}{\big((2m+1)z + n\big)^{2k}}.$$

Con la identidad usada en los desarrollos de Fourier, se tiene que $e(-w)\sum_{n\in\mathbb{Z}}(w+n)^{-2k}$ tiende a $(2\pi i)^{2k}/(2k-1)!$ para $\Im(w) \to +\infty$. De nuevo, si no lo ves claro, busca explicaciones.

**12)** Deduce

$$\lim_{\Im(z)\to+\infty} \frac{e(-z)G_{\theta,2k}(\gamma_1 z)}{z^{2k}} = \frac{2(2\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \qquad \text{si} \quad 2 \mid k.$$

**13)** Justifica $\sum(-1)^n(w+n)^{-2k} = 2^{1-2k}\sum(w/2+n)^{-2k} - \sum(w+n)^{-2k}$ donde los sumatorios son en $n \in \mathbb{Z}$ y, con un razonamiento similar al anterior (basta con que indiques las líneas generales), prueba

$$\lim_{\Im(z)\to+\infty} \frac{e(-z/2)G_{\theta,2k}(\gamma_1 z)}{z^{2k}} = -\frac{4\pi^{2k}}{(2k-1)!} \qquad \text{si} \quad 2 \nmid k.$$

---

**Tarea a entregar.** Debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. De nuevo, trata no superar las 7 páginas con el formato de esta hoja o de la plantilla. Intenta omitir los detalles que no sean necesarios. A mi juicio tiendes a explicar demasiado las cosas y, sobre todo, a hacerlo con fórmulas. Como ves, he incluido algunos comentarios sobre la relación con el resto de tu trabajo e información sobre extensiones de la definición original y de la condición de crecimiento. Tú verás cuánto quieres incluir en ese sentido. El documento debe dar lugar a un tercer capítulo de tu TFG llamado *La función theta* o la variante que se te ocurra. Recuerda que los tres primeros ejercicios deben ir en el primer capítulo, junto con los de la primera hoja, sustituyendo a lo que estaba a medio hacer.

---

# Referencias


[1] F. Chamizo and D. Raboso. La fórmula de sumación de Poisson y parientes cercanos. *Materials Matemàtics*, pages 1–27, 2017. https://mat.uab.cat/web/matmat/v2017n02/.

[2] H. Cohen and F. Strömberg. *Modular forms*, volume 179 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017. A classical approach.

[3] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals*. Academic Press, New York, 1972. Probability and Mathematical Statistics, No. 14.

[4] E. Grosswald. *Representations of integers as sums of squares*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[5] Pr∞fWiki contributors. Fourier Transform of Gaussian Function — Pr∞fWiki. https://proofwiki.org/w/index.php?title=Fourier_Transform_of_Gaussian_Function&oldid=668452, 2023. [Online; accessed 26-December-2023].

[6] D. Zagier. Elliptic modular forms and their applications. In *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, pages 1–103. Springer, Berlin, 2008. https://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/doi/10.1007/978-3-540-74119-0_1/fulltext.pdf.