El propósito de esta hoja es introducir las formas modulares, ver los ejemplos más básicos y terminar con el cálculo de la dimensión del espacio vectorial que conforman las formas modulares. Todo o casi todo te resultará nuevo. Más de una vez tendrás que apelar a tus conocimientos de Variable Compleja I, que me dijiste que se te había dado bien. También tendrás que saber alguna cosita muy básica de series de Fourier.

Se dice que una función holomorfa $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una *forma modular de peso* $k \ge 0$, con respecto al grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, si satisface

$$f(\gamma z) = j_\gamma^k(z) f(z) \qquad \text{para todo} \quad \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \tag{1}$$

y además $\lim_{y\to+\infty} y^{-\alpha}|f(x+iy)| = 0$ para algún $\alpha > 0$, es decir, crece menos que algún polinomio en las verticales. Dicho sea de paso, cuando no se pide una condición de crecimiento [2, §1.3] o se relaja a crecimiento exponencial [7, §1.1], se habla de *funciones modulares.* Otra terminología al uso es llamar *formas débilmente modulares* a las funciones holomorfas en $\mathbb{H}$ que satisfacen (1), sin exigir nada acerca de su crecimiento.

La definición es muy rara. Por si tienes curiosidad, te intento explicar brevemente de dónde surgió (1). Lo pongo en letra menor para que no sientas que es algo necesario.

En el siglo XIX se empezaron a estudiar funciones de variable compleja, llamadas *elípticas*, que tenían dos periodos ω_1 y ω_2 (apuntando en direcciones distintas). No solo eran una especie de generalización de las funciones trigonométricas sino que tenían curiosas aplicaciones aritméticas. Tal estudio llevó a considerar funciones del retículo generado por los periodos, que es el conjunto de traslaciones que dejan invariante a la función elíptica, $\mathcal{L}(\omega_1,\omega_2) = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \,:\, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$. Como $\mathcal{L}(\omega_1,\omega_2) = \mathcal{L}(\omega_2,\omega_1)$ siempre se puede suponer $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$. Además, $\mathcal{L}(\omega_1,\omega_2)$ es lo mismo que $\mathcal{L}(a\omega_1+b\omega_2, c\omega_1+d\omega_2)$ si $ad-bc=1$ con $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Por ello, surgieron funciones g de dos variables complejas que cumplían:

$$g(\omega_1,\omega_2) = g(a\omega_1+b\omega_2, c\omega_1+d\omega_2) \qquad \text{con} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}). \tag{2}$$

En la teoría de funciones elípticas, tales g eran homogéneas, esto es, $g(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda^{-k} g(z_1,z_2)$. En particular, tomando $\lambda = z_2^{-1}$ se tiene $z_2^k g(z_1,z_2) = f(z_1/z_2)$ para cierta f. La igualdad (2) implica que f verifica (1) con $z = \omega_1/\omega_2$. Una función de ω_1/ω_2 llamada *módulo* en los primeros trabajos de integrales elípticas tenía esta propiedad y de ahí vino el nombre de forma modular.

1) Con lo aprendido en la hoja anterior, muestra que k es un entero par (no negativo) y que (1) equivale a

$$f(z+1) = f(z) \qquad \text{y} \qquad f(-1/z) = z^k f(z).$$

Para lo de la paridad, recuerda lo de la acción similar de γ y $-\gamma$.

De esta forma, comprobar que cierta f es modular, aparte de la condición de crecimiento y la holomorfía, se traduce en comprobar la 1-periodicidad y cierta simetría. Con ello ya estamos preparados para los ejemplos más básicos de formas modulares, que son las *series de Eisenstein* definidas como (algunos autores e.g. [7, (10)] introducen un factor 1/2)

$$G_k(z) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{\vec{0}\}} (mz+n)^{-k} \qquad \text{con } k > 2 \text{ par.}$$

El problema para extender la definición a $k = 2$ es que no hay convergencia absoluta y el resultado depende del orden de sumación.

2) Demuestra que G_k es una forma modular de peso k.

Las formas modulares son 1-periódicas y admiten un desarrollo de Fourier convergente $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e(nz)$ donde aquí y en lo sucesivo, $e(t)$ abrevia $e^{2\pi i t}$. Cuando n es negativo $e\big(n(x+iy)\big)$ crece exponencialmente en y, por tanto suena razonable que se pueda deducir (no veremos los detalles) que la condición de crecimiento implica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e(nz). \tag{3}$$

Recíprocamente, si uno tiene un desarrollo de Fourier convergente de la forma (3), entonces $\lim_{y\to+\infty} |f(x+iy)| = |a_0|$ y se cumple automáticamente la condición de crecimiento para cualquier $\alpha > 0$. De hecho, si $a_0 = 0$, podríamos tomar $\alpha = 0$ porque la forma modular se anula en el infinito. En este caso, se dice que la forma modular es *cuspidal* o *parabólica*. A menudo en la teoría de formas modulares se trabaja directamente con desarrollos del tipo (3) y entonces la condición de crecimiento y la holomorfía están garantizadas.

El objetivo de los tres ejercicios siguientes es probar que el desarrollo de Fourier de las series de Eisenstein es:

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e(nz) \tag{4}$$

donde $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ y $\sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s$, esto es, da la suma de potencias de los divisores. Por ejemplo, para p primo $\sigma_s(p) = 1 + p^s$. Como $\zeta(k) > 0$, G_k no es cuspidal.

3) Dado $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, verifica que el n-ésimo coeficiente de Fourier de la función definida como $\pi e(-rx)$ en el intervalo $[-1/2, 1/2]$ es $(-1)^n (r+n)^{-1} \operatorname{sen}(\pi r)$.

4) Aplica la identidad de Parseval al desarrollo de Fourier anterior y después utiliza la extensión analítica a $r \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ para justificar las igualdades:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} = -\frac{\pi^2}{\operatorname{senh}^2(\pi i z)} = -\frac{4\pi^2 e(z)}{\big(1-e(z)\big)^2} = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n e(nz) \qquad \text{para} \quad z \in \mathbb{H}.$$

5) Derivando sucesivas veces y sustituyendo z por mz después de derivar, deduce

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e(nz) \qquad \text{para } k > 2 \text{ par}$$

y de aquí el desarrollo de Fourier (4).

Ahora vamos a ver un ejemplo muy importante y más complicado. Es la llamada *función discriminante* que se define como

$$\Delta(z) = e(z) \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - e(nz)\big)^{24}.$$

Algunos autores [2, (2.69)] multiplican esta definición por una constante. Con un poco de paciencia operando los productos parciales se deducen los primeros términos de la serie de Fourier $e(z) - 24\, e(2z) + 252\, e(3z) + \dots$ cuyos coeficientes no admiten una fórmula sencilla. Ramanujan conjeturó algunas propiedades [6] que tuvieron gran repercusión en las matemáticas posteriores. El caso es que como el producto infinito converge, tendremos una serie de Fourier (3). Esta o la propia definición aseguran la condición de crecimiento y la holomorfía. Por lo visto hasta ahora, para demostrar que Δ es una forma cuspidal de peso 12 basta probar

$$\Delta(-1/z) = z^{12}\Delta(z) \qquad \text{para} \quad z \in \mathbb{H}. \tag{5}$$

Si no ves clara esta afirmación, piénsala hasta que sepas explicártela a ti misma.

Para demostrar (5) vamos a utilizar un argumento de Siegel [4] basado en el teorema de los residuos.

6) Explica que por el principio de unicidad [5] se puede suponer $z = it$ con $t \in \mathbb{R}^+$ y que, en ese caso, (5) equivale a la identidad

$$12 \log t = 2\pi(t - t^{-1}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(\frac{24}{e^{2\pi nt} - 1} - \frac{24}{e^{2\pi n/t} - 1}\Big). \tag{6}$$

Con este fin, te puede resultar útil $-\sum_{m=1}^{\infty} \log(1 - x^m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{nm}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(1-x^n)}$ que se sigue por Taylor.

7) Sea la función

$$h(z) = \frac{3}{z} \cdot \frac{e(z)+1}{e(z)-1} \cdot \frac{e(iz/t)+1}{e(iz/t)-1}.$$

Comprueba que es impar. Sea $\mathcal{P}$ el (borde del) paralelogramo de vértices 1, it, -1 y $-it$. Explica por qué el teorema de los residuos implica para $N \in \mathbb{Z}^+$

$$\int_{\left(N+\frac{1}{2}\right)\mathcal{P}} h(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(h, 0) + 4\pi i \sum_{n=1}^{N} \big(\operatorname{Res}(h, n) + \operatorname{Res}(h, itn)\big)$$

y calcula el valor de los residuos para obtener que el segundo miembro coincide con el de (6) cambiando ∞ por N.

Dependiendo de tus habilidades con la Variable Compleja I, el cálculo de $\operatorname{Res}(h, 0)$ te puede llevar un rato. Si ves que te cuesta, da por hecho que $2\pi i \operatorname{Res}(h, 0) = 2\pi\big(t - t^{-1}\big)$. Aquí y en el resto de los residuos basta que pongas en tu trabajo que se deducen con un cálculo y que escribas solo el resultado final de cada uno si te ves corta de espacio.

8) Dado $z = x + iy \in \mathcal{P}$ que no sea un vértice (esto es, que cumpla $xy \neq 0$), muestra que $(N + \frac{1}{2})h\big((N + \frac{1}{2})z\big) \to 3z^{-1}\operatorname{sgn}(xy)$ cuando $N \to \infty$, donde sgn indica el signo. Utiliza esto para probar

$$\lim_{N\to\infty} \int_{(N+\frac{1}{2})\mathcal{P}} h(z)\,dz = \int_1^{it} \frac{3dz}{z} - \int_{it}^{-1} \frac{3dz}{z} + \int_{-1}^{-it} \frac{3dz}{z} - \int_{-it}^{1} \frac{3dz}{z} = 12\log t.$$

Combinándolo con los ejercicios anteriores, deduce finalmente (5) y que, por tanto, Δ es una forma modular de peso 12.

Está claro que las formas modulares de un peso fijado k forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, porque (1) se conserva mediante sumas y multiplicaciones por números. Un resultado fundamental de la teoría es que su dimensión es finita. Por tanto, las formas modulares son muy rígidas, hay pocas posibilidades esencialmente distintas y eso fuerza identidades sorprendentes. Tales identidades son cruciales para estudiar el número de representaciones de un entero como suma de cuadrados, que es el tema de tu trabajo.

Si llamamos $\mathcal{M}_k$ al espacio vectorial de formas modulares de peso k y $\mathcal{S}_k$ al de las formas cuspidales del mismo peso (¿ves claro que también forman un espacio vectorial?), el resultado fundamental es:

$$\dim \mathcal{M}_k = \begin{cases} \lfloor k/12 \rfloor & \text{si } k \equiv 2 \mod 12, \\ \lfloor k/12 \rfloor + 1 & \text{si } k \not\equiv 2 \mod 12 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \dim \mathcal{S}_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 12, \\ \dim \mathcal{M}_k - 1 & \text{si } k \geq 12. \end{cases}$$

Aquí, como es habitual, $\lfloor x \rfloor$ significa la parte entera de x.

Esta fórmulas para la dimensión dependen en gran medida de una consecuencia del principio del argumento, llamada a veces *fórmula de valencia*, que afirma

$$\frac{1}{2}n_i(f) + \frac{1}{3}n_{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}(f) + n_\infty(f) + \sum_z{}' n_z(f) = \frac{k}{12}$$

donde $n_\infty(f)$ indica el menor n en (3) con $a_n \neq 0$, n_z es el orden de anulación de f en z (cero si $f(z) \neq 0$ y m si z es un cero de orden m) y el sumatorio es sobre un conjunto maximal de elementos de $\mathbb{H}$ que no están relacionados por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ni tampoco están en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})i$ ni en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Recordando el dominio fundamental habitual para el grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, esto es, $\mathcal{D} = \big\{z \in \mathbb{H} : |z| \geq 1,\ |\Re(z)| \leq 1/2\big\}$, la suma se puede hacer sobre

$$\mathcal{D} - \partial\mathcal{D} \cap \{\Re(z) < 0\} - \Big\{i, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\Big\} \qquad \text{donde } \partial\mathcal{D} \text{ indica la frontera.}$$

Seguramente te preguntes qué tienen de particular i, $(1+i\sqrt{3})/2$ e ∞. Aunque esto no se vea muy bien en las pruebas, lo crucial es que son los "únicos" puntos del dominio fundamental $\mathcal{D}$ que quedan invariantes por algún elemento de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Así $z\mapsto -1/z$ fija i, $z\mapsto -1/(z-1)$ fija $(1+i\sqrt{3})/2$ y $z\mapsto z+1$ fija ∞. En realidad $(-1+i\sqrt{3})/2$ también tiene esta propiedad, pero es un "duplicado" de $(1+i\sqrt{3})/2$ en el sentido de que se transforma en él al aplicar T. Hay fórmulas más generales para otros grupos [1, §7.4] en las que aparecen los puntos con esta propiedad de invariancia por algún elemento.

La demostración de las fórmulas para la $\dim \mathcal{M}_k$ y $\dim \mathcal{S}_k$ te voy a pedir que la leas y la escribas con tus palabras. Incluso si al final no reflejas el siguiente ejercicio en tu trabajo, te recomiendo que lo hagas.

9) Lee en [7, §1.3] la prueba de la cota superior para $\dim \mathcal{M}_k$, esto es, hasta el Corolario 1 incluido.

Para ilustrar lo que te he dicho de las formas modulares y las identidades sorprendentes, aquí va un ejemplo clásico:

10) Las funciones $G_4^2(z)$ y $G_8(z)$ son ambas formas modulares de peso 8. Sabiendo que $\zeta(4)=\pi^4/90$ y $\zeta(8)=\pi^8/9450$ muestra que $3G_4^2-7G_8\in\mathcal{S}_8$. Según lo que has leído o por la fórmula de la dimensión, $\dim \mathcal{S}_8=0$, por tanto $G_8(z)=\frac{3}{7}G_4^2(z)$, lo cual es bastante increíble. Opcional: Usando (4) y comparando coeficientes n-ésimos, deduce la también increíble fórmula

$$\sigma_7(n)=\sigma_3(n)+120\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_3(m)\sigma_3(n-m).$$

11) Lee la prueba de las fórmulas para la dimensión y escríbela con tus palabras. Para ello puedes seguir varios caminos. Una opción es continuar con [7, §2.1] para transformar la cota superior en una igualdad. Otra opción, que quizá te resulte más sencilla porque contiene muchas explicaciones, es leer todo por [3, §1.6]. El objetivo es llegar al Corolario 1.6.8, pero ten en cuenta que la prueba de la fórmula de valencia se pospone a §1.6.2. La tercera opción que te sugiero es mirarlo por [2, §1.6], ahí está escrito más breve y las explicaciones son todavía buenas.

Me has dicho que no sabías series de Fourier, termino poniendo en letra pequeña todo lo que debes conocer para esta hoja y un poco de información más.

Durante muchos años entre los siglos XVIII y XIX hubo cierto debate entre los matemáticos que se puede glosar como el problema de si toda función 1-periódica se puede escribir como una superposición de ondas puras del tipo $\mathrm{sen}(2\pi nx)$ y $\cos(2\pi nx)$. Si uno suponía esto, podía resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales relevantes en la física matemática. La respuesta es afirmativa sustituyendo "toda función" por "función con suficiente regularidad", que es lo que tenían en mente en la época. Por ejemplo, si $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ es 1-periódica y C^1, existen a_n tales que

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e(nx)\qquad\text{para todo } x\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

Utilizar $e(nx) = \cos(2\pi nx) + i\,\mathrm{sen}(2\pi nx)$ en lugar de $\mathrm{sen}(2\pi nx)$ y $\cos(2\pi nx)$ es solo una cuestión estética, para que queden las fórmulas más bonitas. La convergencia se vuelve muy rápida si f es muy regular. Multiplicando por $e(-mx)$ e integrando en $I = [-1/2, 1/2]$, como $\int_I e\big((n-m)x\big)\,dx = 0$ para $n \neq m$, se deduce la fórmula

$$a_n = \int_I f(x)e(-nx)\,dx.$$

Incluso si f es muy mala, todavía se puede dar sentido a (7). Por ejemplo, si f solo está en $L^2(I)$ (y es 1-periódica) entonces (7) sigue siendo cierta con los a_n dados por la fórmula salvo que hay que cambiar la convergencia para todo $x \in \mathbb{R}$ por la convergencia en $L^2(I)$. En realidad, en 1966 se logró probar que la convergencia puntual también se cumplía en casi todo punto (este es un teorema dificilísimo). En cualquier caso, siempre que $\int_I |f|^2$ tenga sentido (como integral de Lebesgue), se verifica la *identidad de Parseval*

$$\int_I |f|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2$$

que es lo que se obtendría al calcular $\int_I f(x)\overline{f(x)}\,dx$ sustituyendo cada f formalmente por (7), operando e integrando término a término.

Una pequeña cosa de terminología: Solo las funciones periódicas tienen desarrollos de Fourier. Si nos hablan del desarrollo de una función definida en I, debemos entender que la función que realmente estamos manejando es su extensión 1-periódica. Esto puede causar cierto conflicto en los extremos, pero es irrelevante cuando se considera la función como elemento de L^2.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. La extensión es libre, pero intenta no superar las 7 páginas con el formato de esta hoja o de la plantilla. Soy consciente de que hay bastante material. No hace falta que reflejes los cálculos completos, sobre todo cuando sean rutinarios. Si ves que te pasas, intenta hacer una selección. El documento debe dar lugar a un segundo capítulo de tu TFG llamado *Formas modulares: definición, ejemplos y dimensión* o la variante que se te ocurra.

Referencias

[1] H. Cohen and F. Strömberg. *Modular forms*, volume 179 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017. A classical approach.

[2] H. Iwaniec. *Topics in classical automorphic forms*, volume 17 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[3] M. Masdeu. Modular forms. `https://mat.uab.cat/~masdeu/teaching/`, 2015.

[4] C. L. Siegel. A simple proof of $\eta(-1/\tau) = \eta(\tau)\sqrt{\tau/i}$. *Mathematika*, 1:4, 1954.

[5] Wikipedia contributors. Identity theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Identity_theorem&oldid=1168073046, 2023. [Online; accessed 9-October-2023].

[6] Wikipedia contributors. Ramanujan tau function — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ramanujan_tau_function&oldid=1165535000, 2023. [Online; accessed 9-October-2023].

[7] D. Zagier. Elliptic modular forms and their applications. In *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, pages 1–103. Springer, Berlin, 2008. https://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/doi/10.1007/978-3-540-74119-0_1/fulltext.pdf.