Antes de comenzar, debo corregir una errata de un signo en la hoja anterior en la fórmula de inversión. Al copiar de la fórmula anterior se me olvidó quitar el signo del argumento de la exponencial compleja. La fórmula correcta es:

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e(x\xi)\, d\xi}$$

Perdona por el despiste. Como no la habíamos aplicado, no tiene consecuencias en la hoja anterior, solo hay que incluir el enunciado correcto allí.

En esta hoja nos vamos a ocupar de dos temas que están relacionados con un paso previo al tratamiento digital de una señal identificada con una función de variable real. Primero veremos si es posible no perder información al considerar solo un conjunto discreto de valores y después estudiaremos cómo podemos modificar el contenido en frecuencias actuando sobre esos valores. Además de la parte teórica, tendrás que hacer unos pequeños programas que ilustrarán la situación. El dibujo de algunas gráficas será parte importante de esta hoja. Uses el *software* que uses, pon algún esfuerzo en que visualmente queden bien.

Para el tratamiento digital de una señal $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ es natural *muestrearla*, esto es, medir su valor con cierta *frecuencia de muestreo* ν_s (la "s" es por *sampling*) o, lo que es lo mismo, cada $1/\nu_s$ unidades de tiempo. Matemáticamente pasamos de la función f al conjunto discreto de valores $\big\{f(n/\nu_s)\big\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Evidentemente no es posible recuperar una función general a partir de puntos sueltos. Sin embargo, el teorema de muestreo de Shannon, también llamado de Nyquist-Shannon, afirma que es posible si las frecuencias que componen f están limitadas. El contenido en frecuencias viene dado por la transformada de Fourier, así que esta hipótesis se traduce en que esta tenga soporte acotado. El enunciado del teorema sin preocuparnos de la regularidad (basta f continua integrable entendiendo la convergencia en L^2) es:

Teorema (de muestreo de Shannon)**.** *Sean $\nu_s > 0$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que el soporte de $\widehat{f}$ está contenido en $I = [-\nu_s/2, \nu_s/2]$, entonces*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/\nu_s)\, \mathrm{sinc}(\nu_s t - n) \qquad \textit{con} \quad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{\pi x} \ \textit{si } x \neq 0 \quad \textit{y} \quad \mathrm{sinc}(0) = 1.$$

La función sinc es muy empleada en ingeniería y a veces se le llama *seno cardinal*. En palabras, el teorema afirma que si f no contiene frecuencias mayores que $\nu_s/2$, entonces podemos reconstruirla muestreando con frecuencia ν_s.

Aunque no lo veremos aquí, el teorema es óptimo en el sentido de que para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño existe una función f no idénticamente nula tal que $\widehat{f}$ tiene soporte en $[-\nu_s/2 - \varepsilon, \nu_s/2 + \varepsilon]$ y $\{f(n/\nu_s)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es la sucesión nula. Es decir, no es posible distinguirla de la función nula a partir del muestreo. Si tienes interés en ello, mira [3, §4].

1) Bajo las hipótesis del teorema, sea g la extensión ν_s-periódica de $\widehat{f}$ restringida a I. Es decir, $g(x) = \widehat{f}(x - \nu_s n)$ con un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $|x - \nu_s n| \le \nu_s/2$. Demuestra las igualdades:

$$g(\xi) = \nu_s^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(n\xi/\nu_s) \int_I \widehat{f}(x) e(-nx/\nu_s)\, dx = \nu_s^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/\nu_s) e(-n\xi/\nu_s).$$

Indicación: En la segunda igualdad cambia $n \mapsto -n$ y aplica la fórmula de inversión.

2) Explica por qué $f(t) = \int_I g(\xi) e(t\xi)\, d\xi$ y sustituyendo en la igualdad del ejercicio anterior concluye la prueba del teorema.

Aunque resulta natural que los canales de transmisión limiten las frecuencias, no deja de ser una idealización. En los siguientes problemas vamos a experimentar con señales en las que esta limitación es solo aproximada.

Considera $f(t) = e^{-\pi(4t)^2}$. Según viste en la hoja anterior, $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{4} e^{-\pi(\xi/4)^2}$. Se tiene entonces que $\max \widehat{f} = \frac{1}{4}$ y $\widehat{f}(\xi)$ es más de 100 veces más pequeño para $|\xi| > 5$. Así que $\widehat{f}$ se aproxima por una función de soporte incluido en $[-5, 5]$.

3) Comprueba con un programa que las gráficas en $|t| < 1/2$ de $f(t)$ y del segundo miembro del teorema son prácticamente idénticas cuando $\nu_s = 10$ (por ejemplo, dibuja una gráfica con línea discontinua sobre la otra). Para dibujar la suma infinita, gracias al decaimiento exponencial de f, te puedes limitar a $|n| \le 3\nu_s$ sin perder apenas precisión.

4) Estudia experimentalmente el efecto en la aproximación de tomar $\nu_s = 4$, 6, 8, representando los resultados en una misma gráfica.

5) Considera ahora $f(t) = e^{-\pi(4t)^2} \cos(4\pi t)$ que tiene un aspecto parecido. Comprueba que ahora $\nu_s = 10$ no da tan buena aproximación mientras que para $\nu_s = 14$ se vuelven a obtener gráficas prácticamente idénticas.

6) Calcula explícitamente $\widehat{f}$ y explica lo obtenido en el ejercicio anterior.

En el resto de la hoja vamos a considerar $\nu_s = 1$, es decir, que el muestreo se efectúa en los enteros. Es solo para simplificar, para cualquier otra frecuencia de muestreo todo sería similar con un cambio de escala.

Consideramos una señal (función) del tipo[1]

$$f(t) = \sum_{\nu \in \mathcal{F}} a_\nu e(\nu t)$$

donde $\mathcal{F}$ es cierto conjunto de frecuencias. Como $\nu_s = 1$, teniendo en mente el teorema de Shannon, suponemos $\mathcal{F} \subset [-1/2, 1/2]$.

[1] Al escribirla como un sumatorio estamos suponiendo implícitamente que $\mathcal{F}$ es numerable, pero todo funcionaría igual reemplazando sumas por integrales si $\mathcal{F}$ fuera, por ejemplo, un intervalo.

Un *filtro lineal* (ingeniería) o un *multiplicador* (matemáticas) es un operador

$$f(t) \longmapsto \sum_{\nu\in\mathcal{F}} a_\nu b_\nu e(\nu t).$$

A menudo lo que se intenta es cancelar ciertas frecuencias ($b_\nu = 0$) o exagerar otras (b_ν grande). En ingeniería los filtros FIR (*finite impulse response*) [4], los filtros lineales más importantes, corresponden a $b_\nu = H\big(e(\nu)\big)$ para cierta función $H(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k z^{-k}$ llamada *función de transferencia* donde h_k tiene soporte finito, es decir, existe N tal que $h_k = 0$ para $|k| > N$.

7) Al muestrear, pasaremos de f a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con $x_n = f(n)$. Comprueba que con este muestreo el efecto de un filtro FIR es

$$x_n \longmapsto y_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k x_{n-k}.$$

Esto es lo que en matemáticas se llama una *convolución* y es muy posible que las hallas visto en esta versión en relación con la matemática discreta o en su versión continua en los cursos en los que haya aparecido análisis de Fourier [1, §2.1].

Uno de los filtros más fundamentales es el *filtro paso bajo* que solo permite pasar las frecuencias por debajo de cierta frecuencia de corte $0 < \nu_c < 1/2$. Idealmente lo que queremos es que al tomar $x_n = e(\nu n)$ resulte $y_n = x_n$ si $|\nu| < \nu_c$ mientras que $y_n = 0$ si $\nu_c < |\nu| \le 1/2$.

8) Usando que solo un número finito de los h_k son no nulos, explica por qué el filtro paso bajo es irrealizable como filtro FIR.

El reto en ingeniería es obtener buenas aproximaciones del filtro paso bajo utilizando filtros FIR. Comencemos viendo que si pudiéramos usar infinitos h_k, sí sería posible. Esto no es una opción realista porque, en general, cuanto mayor sea el N antes introducido, más difícil es construir el filtro en la práctica [5, Ch. 16].

9) Sea p la función 1-periódica que vale 1 en $(-\nu_c, \nu_c)$ y cero en $[-1/2, -\nu_c) \cup (\nu_c, 1/2]$. Utiliza series de Fourier para probar

$$p(x) = 2\nu_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(2\nu_c k)\, e(kx).$$

En los puntos de discontinuidad $\pm\nu_c + \mathbb{Z}$, la serie converge a $1/2$ de acuerdo con la teoría [1, §1.6 Ex. 1], pero eso es irrelevante para nosotros. Concluye que escogiendo $h_k = 2\nu_c \operatorname{sinc}(2\nu_c k)$ para $k \in \mathbb{Z}$ se obtiene el filtro paso bajo.

Si has entendido todo esto, verás que el problema matemático es hallar unos h_k tales que

$$H\big(e(\nu)\big) = \sum_{k=-N}^{N} h_k e(-\nu k) \tag{1}$$

se parezca a la función característica de $(-\nu_c, \nu_c)$ para $|\nu| \le 1/2$. Si no lo ves claro, piénsalo y escribe unas líneas explicándotelo a ti misma. En cualquier caso, enuncia esto claramente en tu trabajo.

El último ejercicio que has hecho, afirma que para $N = \infty$ se tiene la solución exacta con $h_k = 2\nu_c \operatorname{sinc}(2\nu_c k)$. Cabría entonces esperar que si N es grande obtendremos una buena aproximación con esta elección. El famoso *fenómeno de Gibbs* [1, §1.6] implica que esto no es exactamente así: por grande que sea N siempre se obtiene un pico que llega hasta altura algo mayor que 1.08, alrededor del 9 % del máximo de la función característica que queremos aproximar.

10) Dibuja las gráficas en $\nu \in [0, 1/2]$ de (1) para $N = 20$, 30 y 40 con $h_k = 2\nu_c \operatorname{sinc}(2\nu_c k)$ cuando $\nu_c = 1/4$, corroborando lo dicho sobre el fenómeno de Gibbs. Si limitas el eje Y a $[0.8, 1.2]$ podrás apreciar mejor el tamaño del máximo. Nota que (1) es en nuestro caso real porque $h_k = h_{-k}$ permite sustituir $e(-\nu k)$ por $\cos(2\pi\nu k)$.

La manera habitual de combatir el fenómeno de Gibbs es introduciendo *ventanas*, unos coeficientes w_k con $w_k = 0$ para $|k| > N$ que multiplican a los h_k ideales que para $N = \infty$ darían el filtro que estemos considerando. Es decir, en nuestro caso se toma $h_k = 2\nu_c w_k \operatorname{sinc}(2\nu_c k)$. A no hacer nada, esto es, a tomar $w_k = 1$ para $|k| \le N$ se le llama *ventana rectangular*. Dos de las ventanas no triviales más comunes en ingeniería son la *ventana de Hann* y la *ventana de Hamming* que responden, respectivamente, a las fórmulas

$$w_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\Big(\frac{\pi k}{N}\Big) \qquad \text{y} \qquad w_k = \frac{25}{46} + \frac{21}{46}\cos\Big(\frac{\pi k}{N}\Big) \qquad \text{para } |k| \le N.$$

11) Haz la gráfica de (1) para $N = 30$ como en el ejercicio anterior, pero ahora con $h_k = 2\nu_c w_k \operatorname{sinc}(2\nu_c k)$ para cada una de estas dos ventanas y observa la diferencia. Tendrás que ampliar la escala para verlo bien.

Hay otras ventanas que involucran funciones más complicadas. Si quieres saber más detalles acerca de cómo se diseñan, he encontrado el clásico [2] más legible que los textos para ingenieros.

Supongamos que un filtro lineal, no necesariamente el paso bajo, queda exactamente representado con ciertos h_k y deseamos aproximarlo con un filtro FIR, esto es, con N finito, introduciendo una ventana. Lo que queremos es que

$$H_N(\nu) = \sum_{k=-N}^{N} h_k w_k\, e(-\nu k) \quad \text{se parezca a} \quad H_\infty(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, e(-\nu k).$$

12) Demuestra la fórmula

$$H_N(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} H_\infty(\nu - t) W(t)\, dt \qquad \text{donde} \quad W(t) = \sum_{k=-N}^{N} w_k\, e(-kt).$$

A la luz de este resultado, explica cualitativamente por qué la aproximación deseada se consigue si W se parece a la delta de Dirac periódica, en el sentido de que $\int_{-1/2}^{1/2} W = 1$ y que W esté bastante concentrada alrededor del origen.

La condición $\int_{-1/2}^{1/2} W = 1$ la cumplen las tres ventanas consideradas. El problema con la rectangular es que W está demasiado dispersa.

13) Dibuja gráficas de W con $N = 40$ en $[-0.12, 0.12]$ para las tres ventanas, ilustrando que las de Hann y Hamming tienen menos "masa" lejos del origen.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. Sugiero no superar las 6 páginas con el formato de esta hoja o de la plantilla, sin contar la bibliografía ni los listados de los programas (que irán seguramente a un apéndice), pero sí las figuras. Quizá debas hacer una selección de ellas o agruparlas adecuadamente para ahorrar espacio. El resultado debe dar lugar a un segundo capítulo de tu TFG bajo el título *Muestreo y filtros FIR* o algo parecido.

Referencias

[1] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals*. Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.

[2] R. W. Hamming. *Digital Filters*. Prentice Hall International (UK) Ltd., third edition, 1989.

[3] G. Lerman. The Shannon sampling theorem and its implications. `https://www-users.cse.umn.edu/~lerman/math5467/shannon_aliasing.pdf`, Lecture notes from Math 5467: Introduction to the Mathematics of Image and Data Analysis, Spring 2015.

[4] Wikipedia contributors. Finite impulse response — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Finite_impulse_response&oldid=1240945295`, 2024. [Online; accessed 8-November-2024].

[5] S. Winder. *Analog and Digital Filter Design*. EDN Series for Design Engineers. Elsevier Science, 2002.