

La *identidad de Parseval* o *teorema de Parseval* es una fórmula básica del análisis de Fourier que tiene interés en ingeniería. Aquí veremos diferentes ejemplos y aplicaciones matemáticas. Esta hoja será más breve que las anteriores para compensar el exceso de extensión acumulado.

Recuerda que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que sea 1-periódica y que tenga regularidad suficiente coincide con su serie de Fourier, esto es,

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x} \quad \text{con} \quad a_n = \int_{-1/2}^{1/2} f(t) e^{-2\pi i n t} dt.$$

Por si te es más familiar el desarrollo de Fourier con senos y cosenos, la costumbre de utilizar exponenciales complejas es solo un artificio para escribir menos, pues $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Lo que afirma el teorema de Parseval es que

$$\int_{-1/2}^{1/2} |f|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2.$$

Por un argumento de densidad, esta fórmula, de hecho, se cumple siempre que la integral tenga sentido, esto es, para $f \in L^2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$, incluso si no se tiene la igualdad de f y su serie de Fourier en todo punto. Fuera de estos casos patológicos, la demostración es simple: basta integrar término a término en $|f|^2 = \bar{f}f$. En toda esta hoja, con la excepción de un solo ejemplo, supondremos sin repetirlo cada vez que las funciones que desarrollamos por Fourier son al menos Lipschitz con lo que la convergencia no es un problema, pues para ellas la serie de Fourier converge uniformemente a la función [4], [2]. Quizá te convenga indicarlo al comienzo de tu documento.

Vamos a empezar revisitando la evaluación de $\zeta(4)$. Con lo que viste en la Hoja 2 ya sabes cómo resolver esta cuestión mediante la fórmula de Euler-Maclaurin. Comparativamente, la identidad de Parseval da una solución más rápida, aunque menos general.

1) Sea $f(x) = 12x^2 - 1$ en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ y repetida de manera 1-periódica en el resto. Calcula sus coeficientes de Fourier y demuestra $\zeta(4) = \pi^4/90$ utilizando el teorema de Parseval.

También se puede utilizar para obtener algunas sumas finitas de matemática discreta o combinatoria.

2) Considerando $f(x) = (1 + e^{2\pi i x})^n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ demuestra la identidad

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Explica por qué $\int_I \cos^{2n}(\pi x) = 2^{-2n} \binom{2n}{n}$ para cualquier intervalo I de longitud 1. Si se te ocurre la idea adecuada, no tendrás que hacer ningún cálculo.

Pasamos ahora una identidad clásica que tiene alguna relevancia en la teoría de las *wavelets*, por si te suena el nombre. Aquí la utilizaremos para dar una nueva solución del problema de Basilea, aunque hay maneras más rápidas de proceder. Este es el único caso en que desarrollaremos una función de L^2 no continua.

3) Dado $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ sea $f(x) = \pi e^{-2\pi i r x}$ en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ y su extensión de periodo uno en el resto. Muestra que el teorema de Parseval aplicado a f conduce a

$$(1) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^2(\pi r)}{(r + n)^2} = \pi^2.$$

Deduce que $\zeta(2) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (\pi^2 \operatorname{cosec}^2(\pi x) - x^{-2})$ y calcula el límite para evaluar $\zeta(2)$. Indicación: Es parte del problema que halles el límite de manera rápida. Por ejemplo, te puede ayudar expresarlo como suma por diferencia.

Por continuación analítica (principio de unicidad) la identidad (1) es también válida para $r \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Usaremos este hecho para probar la siguiente fórmula de sumación que es parte de un proceso empleado en teoría de números llamado *sumación de Lipschitz*.

Proposición 1. Sea f de periodo 1, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n}{e^{2\pi n}} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{(x-i)^2}$$

donde $i = \sqrt{-1}$ y a_n son los coeficientes de Fourier de f .

Antes de dar la prueba, veamos un ejemplo (que también se podría tratar con el teorema de los residuos de una forma más complicada).

4) Calcula $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^3(2\pi x)}{(x-i)^2} dx$ utilizando el teorema anterior. Indicación: Es muy fácil hallar la serie de Fourier de $\sin^3(2\pi x)$ con las fórmulas del ángulo triple [5].

5) Tomando $r = i + x$ en (1) con $x \in \mathbb{R}$ justifica las identidades

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x + i + n)^2} = 2\pi i \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi} e^{2\pi i x}} \right) = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{2\pi i n x}}{e^{2\pi n}}.$$

Conjuga, multiplica por $f(x)$ e integra en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ para obtener el teorema.

La última aplicación es un famoso resultado que tiene interesantes consecuencias.

Teorema 2 (Desigualdad de Wirtinger). Dado un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, sea $\mathcal{F}(I)$ el conjunto de funciones continuas C^1 a trozos $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que se anulan en los extremos de I y no son idénticamente nulas en I . Se cumple

$$\sup_{f \in \mathcal{F}(I)} \frac{\int_I |f|^2}{\int_I |f'|^2} = \frac{|I|^2}{\pi^2}.$$

El nombre proviene de que normalmente se presenta escribiendo que el cociente de las integrales es menor o igual que el segundo miembro y quitando denominadores [1].

6) Sea $J = [0, \frac{1}{2}]$ y $\mathcal{G}$ el conjunto de funciones impares de $\mathcal{F}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$. Demuestra las igualdades

$$\sup_{f \in \mathcal{F}(I)} \frac{\int_I |f|^2}{\int_I |f'|^2} = 4|I|^2 \sup_{f \in \mathcal{F}(J)} \frac{\int_J |f|^2}{\int_J |f'|^2} = 4|I|^2 \sup_{f \in \mathcal{G}} \frac{\int_{-1/2}^{1/2} |f|^2}{\int_{-1/2}^{1/2} |f'|^2}.$$

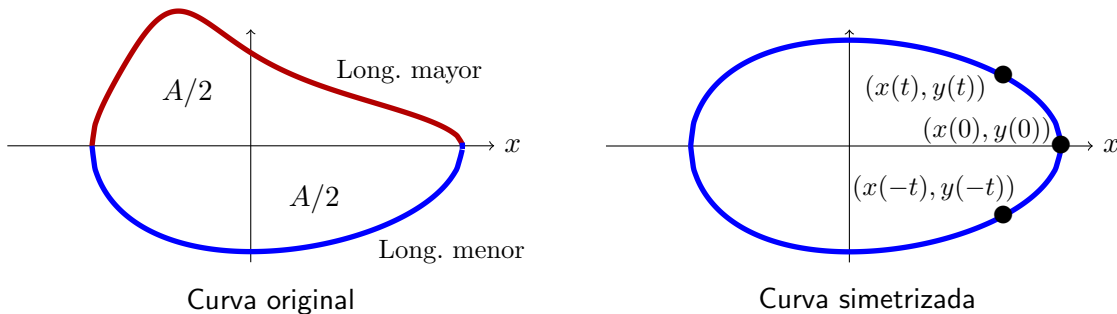
7) Explica por qué para las funciones 1-periódicas impares o pares de promedio cero se cumple $\int_{-1/2}^{1/2} |f|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$. Con esta información deduce que el último cociente del ejercicio anterior es menor o igual que $(2\pi)^{-2}$. Considerando además el ejemplo $f(x) = \sin(2\pi x)$, termina la demostración del teorema.

A. Hurwitz encontró en 1901 una bella aplicación de la desigualdad de Wirtinger para probar la *desigualdad isoperimétrica*. Por si no conoces esta desigualdad, lo que afirma es que si una curva cerrada plana simple (digamos C^1 a trozos) de longitud L encierra un área A , entonces

$$L^2 \geq 4\pi A.$$

Hay generalizaciones a todas las dimensiones y la igualdad se alcanza para las esferas [3].

8) Explica brevemente con palabras (no hace falta que escribas apenas fórmulas) por qué puedes suponer que la curva tiene una parametrización $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ por longitud de arco con $y(0) = 0$ de modo que y sea una función L -periódica impar. Indicación: Con giros y traslaciones se puede conseguir que el eje x corte por la mitad el área. Con una simetría por dicho eje de la mitad con menos longitud tenemos una curva con A igual y L menor o igual. La curva simetrizada da lugar a y impar. Quizá te ayude este dibujo (que puedes copiar de la fuente si cargas el paquete tikZ y modificar como desees):



9) Aplicando el teorema de Green al campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (y, 0)$ deduce que el área es $A = -\int_{-L/2}^{L/2} y(t)x'(t) dt$ y justifica las igualdades

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi A &= L \int_{-L/2}^{L/2} \|\sigma'(t)\|^2 dt + 4\pi \int_{-L/2}^{L/2} y(t)x'(t) dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} (Lx'(Lt) + 2\pi y(Lt))^2 dt + \int_{-1/2}^{1/2} ((Ly'(Lt))^2 - (2\pi y(Lt))^2) dt. \end{aligned}$$

Aplica lo que has aprendido a la función $f(t) = y(Lt) \in \mathcal{G}$ y concluye que ambas integrales son no negativas, lo que termina la prueba de la desigualdad isoperimétrica.

Tarea a entregar. Combina las soluciones de los ejercicios anteriores en un documento intentando ajustarte a seis páginas. Para no excederte, la recomendación es no detallar los cálculos rutinarios. Escribe solo aquellos que pienses que no son mecánicos para un lector con lápiz y papel. El resultado constituirá el cuarto capítulo de tu TFG llamado *La identidad de Parseval* o la variante que prefieras.

Referencias

- [1] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals*. Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.
- [2] Y. Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 2004.
- [3] R. Osserman. The isoperimetric inequality. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84(6):1182–1238, 1978.
- [4] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Fourier analysis*, volume 1 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. An introduction.
- [5] Wikipedia contributors. List of trigonometric identities — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=List_of_trigonometric_identities&oldid=1337063226, 2026. [Online; accessed 12-February-2026].