Ahora trataremos el teorema de los residuos, que te será familiar por el curso de variable compleja. Allí viste su utilidad para evaluar algunas integrales reales complicadas y ahora nos vamos a centrar en las series.

La primera tarea es que recuerdes lo que aprendiste al respecto. Trata de no extenderte demasiado, porque es una introducción teórica, nuestro objetivo es su aplicación a las series. Si las necesitas, tres buenas referencias de variable compleja son [1], [3] y [2].

1) Busca una demostración lo más autocontenida posible del teorema de los residuos y reprodúcela empleando tus propias palabras.

El siguiente ejercicio debería resultar muy sencillo, un repaso de conceptos muy básicos.

2) Si g es meromorfa en $\mathbb{C}$ y no tiene polos en $\mathbb{Z}$, explica por qué se cumple $\operatorname{Res}(f,n) = g(n)$ para $f(z) = \pi g(z)\cot(\pi z)$ y cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

La idea es ahora clara: si los residuos en los enteros son $g(n)$ y g decae lo suficiente en el infinito, entonces podemos evaluar $\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n)$ en términos de los otros residuos de f integrando sobre un contorno que se haga cada vez más grande hasta desaparecer en el infinito.

3) Desarrollando la idea anterior, prueba

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \pi + \frac{2\pi}{e^{2\pi}-1}.$$

El procedimiento se puede generalizar para calcular $\sum_{n\in\mathbb{Z}} R(n)$ donde R es cualquier función racional con grado total menor que -1 para asegurar la convergencia. En general, se desconoce cómo evaluar la serie al reemplazar $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{N}$, esto es, $\sum_{n=1}^{\infty} R(n)$. Por ejemplo, no se conoce una fórmula explícita para $\zeta(3)$. Por otro lado, en el ejercicio anterior está claro por la simetría que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+1} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. A continuación veremos cómo una generalización de esta idea de simetría permite tener éxito con otros casos. A pesar de que no es esencial, para simplificar, nos limitaremos al caso en que R es el inverso de un polinomio sin raíces repetidas.

4) Diremos que un polinomio P es N-par si $P^{(2k-1)}(N) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Demuestra que estos polinomios son exactamente los que verifican $P(N+x) = P(N-x)$ y siempre tienen grado par. Escribe como ilustración dos ejemplos de polinomios 2-pares de grado 4 en $\mathbb{R}[x]$.

5) Dado un polinomio $a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$. Si sabemos que es N-par para algún N ¿cómo se halla N de forma sencilla? Escribe un pequeño código (por ejemplo en sagemath) que dado un polinomio en $\mathbb{Z}[x]$ decida si es N-par para algún N que debe hallar.

A pesar de la notación, para polinomios de $\mathbb{C}[x]$, en principio, N podría ser cualquier número complejo. Para estudiar fórmulas de sumación nos vamos a centrar en el caso $N \in \mathbb{Z}$.

6) Con lo que has aprendido, demuestra la siguiente fórmula de sumación:

Proposición 1. *Sea $P \in \mathbb{C}[x]$ de grado $d \ge 2$ con raíces $r_1, \dots, r_d \in \mathbb{C}$ distintas y no enteras. Si P es N-par con $N \in \mathbb{Z}$ entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P(n)} = \frac{1}{2P(N)} - \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^{d} \frac{\cot(\pi r_j)}{P'(r_j)} + \begin{cases} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{P(n)} & \text{si } N > 0, \\ \sum_{n=N}^{0} \frac{-1}{P(n)} & \text{si } N \le 0. \end{cases}$$

En conclusión, la simetría que impone la N-paridad permite la evaluación explícita de la serie correspondiente a la suma sobre los naturales. Hay un resultado del mismo tipo para N semientero, pero no entraremos en ello aquí.

7) Para ver que lo has entendido, halla una fórmula explícita para

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{120}{36n^4 + 144n^3 + 203n^2 + 118n + 24}.$$

Indicación: A pesar de lo aparatoso del enunciado los cálculos deberían ser bastante sencillos una vez que halles las raíces del denominador. Sabiendo que una de ellas es $-1/2$ y asumiendo que es N-par (cosa que debes comprobar), las otras se pueden obtener sin apenas cálculos.

La proposición anterior permite reducir sumas infinitas a sumas finitas. Terminaremos esta hoja viendo cómo usar el teorema de los residuos para transformar una suma finita en una expresión integral que involucra una serie infinita. Esto que a primera vista parece de nula utilidad, tiene notables aplicaciones en teoría de números gracias a que la serie infinita a veces es más fácil de manipular con técnicas analíticas, mientras que la serie finita tiene un contenido más aritmético o combinatorio. Después veremos un ejemplo.

Proposición 2. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión real o compleja tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-c} < \infty$ para cierto $c > 0$. Si $M \in \mathbb{Z}^+$, se tiene*

$$\sum_{n=1}^{M} (M-n)\, a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{f(s) M^{s+1}}{s(s+1)}\, ds \qquad \text{donde} \quad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Para la demostración, separamos la aplicación del teorema de los residuos.

8) Sean $\mathcal{C}_+$ y $\mathcal{C}_-$ los cuadrados $\mathcal{C}_\pm = \big\{ s \in \mathbb{C} \, : \, |\Re(s \mp N - c)| \le N, \ |\Im(s)| \le N \big\}$ donde $2N > c + 1$. Usa el teorema de los residuos para demostrar que si $\alpha \ge 1$ entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{C}_-} \frac{\alpha^{s+1}}{s(s+1)}\, ds = \alpha - 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{C}_+} \frac{\alpha^{-s-1}}{s(s+1)}\, ds = 0,$$

donde ∂ indica la frontera con la orientación positiva.

9) Demuestra la proposición. Indicación: La condición $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|n^{-c}<\infty$ da la convergencia absoluta que permite integrar término a término. Considera $N\to\infty$ en el ejercicio anterior para hallar la integral de cada uno de dichos términos.

Veamos un ejemplo aritmético.

10) Deduce de la proposición

$$\sum_{n=1}^{M}(M-n)\,\tau(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{3-i\infty}^{3+i\infty}F(s)\,ds \qquad \text{con} \quad F(s)=\frac{\big(\zeta(s)\big)^2M^{s+1}}{s(s+1)}$$

donde $\tau(n)$ es el número de divisores (positivos) de n, por ejemplo, $\tau(1)=1$, $\tau(2)=\tau(3)=2$, $\tau(4)=3$, $\tau(20)=6$.

Se sabe que $(\zeta(s))^2$ tiene una extensión meromorfa a $\mathbb{C}$ con un solo polo en $s=1$ donde su desarrollo de Laurent es de la forma $\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{2\gamma}{s-1}+\dots$ con γ la constante de Euler-Mascheroni [4]. También se sabe que es posible aplicar el teorema de los residuos en la banda $\frac{1}{2}\le\Re(s)\le 3$ a cambio de pagar con un error de orden $M^{3/2}$ por la frontera izquierda, es decir, existe cierta constante C tal que $\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{3-i\infty}^{3+i\infty}F(s)\,ds-\operatorname{Res}(F,1)\right|\le CM^{3/2}$.

11) Dando por supuesto lo anterior, muestra que

$$\Big|\sum_{n=1}^{M}(M-n)\,\tau(n)-M^2\Big(\frac{1}{2}\log M+\gamma-\frac{3}{4}\Big)\Big|\le CM^{3/2}.$$

Así hemos obtenido una desigualdad aritmética a partir de información analítica.

Tarea a entregar. Una vez más, debes combinar las soluciones de los ejercicios anteriores en un documento. Intenta ajustarte a seis páginas, sin contar ni bibliografía ni código, si lo incluyes. En caso de que tengas problemas para respetar esta extensión, sustituye la demostración del teorema de los residuos por unas pocas palabras describiendo la idea. El resultado constituirá el tercer capítulo de tu TFG llamado *El teorema de los residuos*.

Referencias

[1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.

[2] R. V. Churchill and J. W. Brown. *Complex variables and applications.* McGraw-Hill Book Co., New York, fourth edition, 1984.

[3] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2 of *Princeton Lectures in Analysis.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[4] Wikipedia contributors. Euler's constant — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler%27s_constant&oldid=1328532599`, 2025. [Online; accessed 21-December-2025].