En esta hoja estudiaremos la fórmula de Euler-Maclaurin que fue concebida inicialmente por Euler como un método para mejorar las aproximaciones numéricas de algunas series [5]. Aunque admite una deducción elemental [1], aquí daremos un rodeo para entenderla mejor y obtener resultados relacionados con tu trabajo.

Antes de comenzar es conveniente que recuerdas o aprendas que la notación $\zeta(s)$ representa la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. Nosotros solo vamos a tomar $s \in \mathbb{N}$ par. Por si te han hablado de ello, curiosamente el estudio de la distribución de los primos requiere considerar $\zeta(s)$ como una función de variable compleja, a la que se llama *función ζ de Riemann.*

Esencialmente la fórmula de Euler-Maclaurin indica cuánto difiere una suma de una integral. Con esta idea en mente, para $a \le b$ enteros y f una función integrable en $[a,b]$ introducimos la abreviatura

$$E(f,a,b) = \sum_{n=a}^{b} f(n) - \int_a^b f(t)\,dt - \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Si te gusta el cálculo numérico te habrás percatado de que este es el error cambiado de signo en la *regla del trapecio* [2, §5.1] cuando el paso es 1.

La fórmula de Euler-Maclaurin depende de un parámetro $N \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$. El siguiente ejercicio corresponde al caso $N = 0$ que es el más sencillo y también el más usado. Tanto es así, que algunos autores llaman fórmula de Euler-Maclaurin solo a este caso.

1) Demuestra que para $a \le b$ enteros y $f \in C^1([a,b])$ se cumple

$$E(f,a,b) = \int_a^b \psi(t) f'(t)\,dt \qquad \text{con} \quad \psi(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}.$$

Indicación: Integra por partes $\int_n^{n+1} \psi(t) f'(t)\,dt$ y suma en n.

La función ψ es integrable de periodo 1 y, por tanto, tiene una serie de Fourier. La solución del siguiente ejercicio se reduce prácticamente a una cita al último de la hoja anterior, que, aunque el análisis no sea tu tema favorito, deberías haber completado fácilmente, quizá con la ayuda de [4], [6], [7] u otras fuentes.

2) Muestra que la serie de Fourier de ψ es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\pi n} \operatorname{sen}(2\pi n x)$.

La teoría asegura que la $\psi(x)$ coincide con su serie de Fourier salvo en los puntos de discontinuidad $x \in \mathbb{Z}$. A pesar de que esta serie no es absolutamente convergente, la teoría también asegura que podemos integrar término a término porque el factor $1/n^2$ que sale al integrar elimina cualquier problema de convergencia. El único propósito del siguiente problema, que da el caso $N = 1$ de la fórmula, es allanar el camino para probar el Teorema 1. Si andas escaso de espacio lo puedes omitir en tu trabajo.

3) Sustituyendo la serie de Fourier en $\int_a^b \psi(t)f'(t)\,dt$ e integrando por partes dos veces, deduce
$$E(f,a,b) = \frac{\zeta(2)}{2\pi^2}\big(f'(b)-f'(a)\big) + 2\sum_{n=1}^\infty \int_a^b \frac{\operatorname{sen}(2\pi nt)}{(2\pi n)^3} f'''(t)\,dt.$$

Con esto ya tienes los ingredientes para abordar el caso general.

Teorema 1 (Euler-Maclaurin, 1.ª versión)**.** *Para $a\le b$ enteros, $N\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ y $f\in C^{2N+1}([a,b])$ se cumple*
$$E(f,a,b) = \sum_{n=1}^N c_n\big(f^{(2n-1)}(b)-f^{(2n-1)}(a)\big) + R_N$$
donde
$$c_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n) \qquad y \qquad R_N = 2(-1)^{N+1}\int_a^b \sum_{n=1}^\infty \frac{\operatorname{sen}(2\pi nt)}{(2\pi n)^{2N+1}} f^{(2N+1)}(t)\,dt.$$

Para $N=0$ entendemos (como es habitual) que una suma vacía es nula. Para $N>0$ está claro que en R_N suma e integral se pueden intercambiar por la convergencia uniforme.

4) Demuestra el Teorema 1 por inducción en N.

En cierto modo, ahora vamos a pasar de métodos analíticos a métodos algebraicos, pues vamos a sustituir la serie infinita por ciertos polinomios de $\mathbb{Q}[x]$ y c_n por sus términos independientes. Con ello obtendremos una nueva versión más común de la fórmula de Euler-Maclaurin. Dichos polinomios son los llamados *polinomios de Bernoulli* $B_m(x)$. Una manera de definirlos es por medio de la recurrencia
$$B_{m+1}(x) = (m+1)\int_0^x B_m(t)\,dt - (m+1)\int_0^1\int_0^t B_m(u)\,du dt \qquad \text{con} \quad B_1(x) = x-\frac{1}{2}.$$
Esto no es tan complicado como parece, en palabras la receta es: integrar B_m, multiplicar por $m+1$ y añadir una constante (ajustar la constante de integración) para que $\int_0^1 B_{m+1}$ se anule. Nota que B_m tiene grado m y está en $\mathbb{Q}[x]$. Se llaman *números de Bernoulli* a sus términos independientes $b_m = B_m(0)$. El siguiente ejercicio servirá para comprobar que has entendido que el proceso es sencillo. Lo mismo prefieres hacer un programa para resolverlo (si no sabes cómo incluir un listado de código en un documento LaTeX, en `https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/enlaces.html` hay una plantilla).

5) Calcula B_m y b_m para $1\le m\le 5$.

Una curiosidad es que, en contra de lo que sugieren los primeros valores, a la larga los números de Bernoulli de índice par tienen un crecimiento muy rápido. Por ejemplo, la parte entera de b_{200} tiene más de 200 cifras. Por otro lado, se puede probar que los de índice impar son todos nulos excepto b_1.

Con estas definiciones, la fórmula de Euler-Maclaurin adquiere un enunciado algo más compacto. También es más próximo al original, aunque ni Euler ni Maclaurin se preocuparon por el término integral de error [8].

Teorema 2 (Euler-Maclaurin, 2.ª versión)**.** *Para $a \le b$ enteros, $N \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ y $f \in C^{2N+1}([a,b])$ se cumple*

$$E(f,a,b) = \sum_{n=1}^{N} \frac{b_{2n}}{(2n)!}\big(f^{(2n-1)}(b) - f^{(2n-1)}(a)\big) + \int_a^b B_{2N+1}(x - \lfloor x \rfloor)\frac{f^{(2N+1)}(t)}{(2N+1)!}\,dt.$$

La equivalencia entre ambas versiones depende de la relación entre los polinmios de Bernoulli y ciertas series de Fourier.

6) Demuestra que para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ y $x \in [0,1]$ se tiene

$$\frac{(-1)^{k+1}B_{2k}(x)}{2\,(2k)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi n x)}{(2\pi n)^{2k}} \qquad \text{y} \qquad \frac{(-1)^{k+1}B_{2k+1}(x)}{2\,(2k+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2\pi n x)}{(2\pi n)^{2k+1}}.$$

7) Deduce el Teorema 2.

Pasamos ahora a algunas aplicaciones. La primera es en realidad un subproducto de la prueba que has hecho más que de la fórmula en sí. Recuerda que el problema de Basilea, resuelto por Euler, consiste en la identidad $\zeta(2) = \pi^2/6$. Con lo que has aprendido, tenemos una fórmula general para $\zeta(2n)$. No se conocen fómulas similares para $\zeta(2n+1)$.

8) Escribe una fórmula para $\zeta(2n)$ en términos de b_{2n} para $n \in \mathbb{Z}^+$ y observa que $\zeta(2n)$ es un múltiplo racional de π^{2n}. Encuentra una relación entre $\zeta(2n)$ y $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k^{-2n}$. Con ambos resultados da una fórmula para $B_m(1/2)$.

Para la segunda aplicación, nota que desde bachillerato sabes que $\sum_{k=1}^{n} k$ es $n(n+1)/2$ y en Conjuntos y Números seguro que te mandaron probar $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ por inducción. La pregunta natural es qué ocurre para potencias mayores.

9) Aplica la fórmula de Euler-Maclaurin con $a = 0$, $b = n$ y un N adecuado para deducir la *fórmula de Faulhaber* que afirma que para $n, m \in \mathbb{Z}^+$ se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{2n^{m+1} + (m+1)n^m}{2m+2} + \sum_{k=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{b_{2k}}{2k}\binom{m}{2k-1} n^{m+1-2k}.$$

Como ejemplo, obtén una fórmula explícita para $\sum_{k=1}^{n} k^5$.

Si tienes curiosidad, en [3] hay muchas referencias y comentarios históricos.

La última aplicación va en la línea de lo que tenía en mente Euler al crear la fórmula. Supongamos que queremos aproximar el valor de la serie

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \qquad \text{donde} \quad f(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

En realidad, como veremos en otra hoja, S se puede evaluar exactamente en términos de π y de e empleando técnicas de variable compleja, pero ahora pasamos eso por alto. Una posibilidad es tomar una suma parcial. Por ejemplo S_{10}, la suma de los diez primeros términos, que sería asequible con una calculadora (o con la habilidad numérica de Euler). Se cumple

$$S - S_{10} = \sum_{n=11}^{\infty} f(n) > \int_{11}^{\infty} f(t)\,dt = 0{,}0906\ldots$$

de modo que el error es mayor que 9 centésimas. Veamos como reducirlo drásticamente.

10) Usando la fórmula de Euler-Maclaurin con $b \to \infty$, muestra

$$S = A + R_1 \qquad \text{con} \quad A = S_{10} + \frac{\pi}{2} - \arctan(11) + \frac{1}{2} f(11) - \frac{1}{12} f'(11)$$

donde R_1 es como en el Teorema 1. Explica la desigualdad en

$$|S - A| = |R_1| \le \frac{2\zeta(3)}{(2\pi)^3} \int_{11}^{\infty} |f'''(t)|\,dt = \frac{2\zeta(3)}{(2\pi)^3} f''(11) = 3{,}86\ldots \cdot 10^{-6}.$$

La penúltima igualdad viene de que $-f'''$ es positiva y decreciente en $[11, \infty)$ (mira el siguiente ejercicio). En definitiva, pasando de S_{10} a A hemos reducido el error a menos de 4 millonésimas. De hecho, un análisis más cuidadoso muestra que el error es algo menor que $2 \cdot 10^{-7}$.

La última tarea es solo por si quieres aceptar el reto.

11) [Opcional] Prueba que $-f'''$ es positiva y decreciente en $[11, \infty)$ sin calcular f'''. Indicación: Desarrolla $f(x)$ como $\sum a_n x^{-2n}$. Una alternativa, más extraña y directa, es usar fracciones simples complejas.

Tarea a entregar. De nuevo, debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. La extensión libre, aunque con la recomendación de no superar las seis páginas, sin contar ni bibliografía ni código, si lo incluyes. El resultado constituirá el segundo capítulo de tu TFG llamado *La fórmula de Euler-Maclaurin* o la variante que prefieras.

Referencias

[1] T. M. Apostol. An elementary view of Euler's summation formula. *Amer. Math. Monthly*, 106(5):409–418, 1999.

[2] K. E. Atkinson. *An introduction to numerical analysis.* John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1989.

[3] A. F. Beardon. Sums of powers of integers. *Amer. Math. Monthly*, 103(3):201–213, 1996.

[4] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals.* Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.

[5] G. Ferraro. Some aspects of Euler's theory of series: inexplicable functions and the Euler-Maclaurin summation formula. *Historia Math.*, 25(3):290–317, 1998.

[6] G. B. Folland. *Fourier analysis and its applications.* The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1992.

[7] T. W. Körner. *Fourier analysis.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2022. With a foreword by T. Tao.

[8] S. Mills. The independent derivations by Leonhard Euler and Colin Maclaurin of the Euler-Maclaurin summation formula. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 33(1-3):1–13, 1985.