Esta hoja y las sucesivas serán publicadas poco a poco en `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/tfg.html` donde se encuentra la propuesta inicial de los contenidos. La previsión es que haya cinco en total. La fuente LaTeX, en los ficheros `IS25hoja*.tex`, te será muy útil como plantilla y para poder copiar fórmulas y referencias. Más o menos imita el formato indicado en la guía docente. De todas formas, seguramente es más adecuado, para ahorrar tiempo, que las entregas de cada hoja las incluyas en la plantilla oficial del TFG que puedes descargar en Moodle.

Una *fórmula de sumación* es una manera evaluar sumas o transformarlas en otras. Siguiendo lo indicado en la propuesta, la idea es que cada hoja incluya el enunciado y la prueba de una formula de sumación, quizá con algunas variantes, así como algunas aplicaciones destacables por su interés teórico o elegancia.

El tema de esta primera hoja es la *sumación por partes*, que es bastante elemental, la fórmula de sumación más sencilla de tu trabajo, aunque tiene consecuencias poderosas.

Teorema 1 (Sumación por partes)**.** *Para cualquier par de sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ (reales o complejas) se cumple*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = a_N \sum_{n=1}^{N} b_n - \sum_{k=1}^{N-1} (a_{k+1} - a_k) \sum_{n=1}^{k} b_n \qquad \text{para todo} \quad N \in \mathbb{Z}^+.$$

El nombre está justificado por ser una versión discreta de la fórmula de integración por partes, con sumas en lugar de integrales e incrementos en lugar de derivadas. Su demostración es muy simple.

1) Demuestra el Teorema 1.

En la mayoría de las aplicaciones se utiliza el teorema anterior para sucesiones a_n reales no crecientes y es importante la siguiente consecuencia, a veces llamada *desigualdad de Abel* [4, §2.2] (también se aplica este nombre a una variante con números complejos).

Corolario 2. *Si $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_N \ge 0$ y $b_1, b_2, \dots, b_N \in \mathbb{R}$ entonces para $N \in \mathbb{Z}^+$*

$$a_1 \min_{1\le k\le N} \sum_{n=1}^{k} b_n \le \sum_{n=1}^{N} b_n a_n \le a_1 \max_{1\le k\le N} \sum_{n=1}^{k} b_n$$

A pesar de ser una consecuencia del Teorema 1, quizá te cueste más deducirlo que este.

2) Demuestra el Corolario 2.

Hay una variante del Teorema 1 con integrales, también ligada al nombre de Abel, que se usa mucha en teoría de números, tanto es así que en esa área "sumación por partes" se refiere a menudo a ella.

Teorema 3 (fórmula de sumación de Abel)**.** *Sea* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión y* $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_{\ge 1})$*, entonces para cualquier* $x \in \mathbb{R}_{\ge 1}$

$$\sum_{1\le n\le x} c_n \varphi(n) = \varphi(x) \sum_{1\le n\le x} c_n - \int_1^x \varphi'(t) \sum_{1\le n\le t} c_n \, dt.$$

3) Si $x = N \in \mathbb{Z}^+$ comprueba que el Teorema 3 se deduce del Teorema 1 tomando $a_n = \varphi(n)$ y $b_n = c_n$. Para probar el caso general con $x \in \mathbb{R}_{\ge 1}$, escribe $\int_1^x$ como $\int_1^{\lfloor x \rfloor} + \int_{\lfloor x \rfloor}^x$ donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera y evalúa la última integral.

Veamos cómo funciona esto en un ejemplo.

4) Un famoso resultado de teoría de números (*fórmula de Mertens*) afirma que existe una constante C tal que $\big|\sum_{p\le x} \frac{\log p}{p} - \log x\big| < C$ para todo $x \ge 1$, donde p recorre los primos. Tomando $\varphi(x) = 2\log x$, $c_n = n^{-1}\log n$ si n es primo y $c_n = 0$ si no lo es, utiliza el Teorema 3 para probar que existe una constante C' tal que $\big|2\sum_{p\le x} \frac{\log^2 p}{p} - \log^2 x\big| < C' \log x$.

Vamos ahora con una aplicación nada trivial del Teorema 1 a las series de Fourier. Seguramente sabrás que el tema de la convergencia de estas series es bastante espinoso a no ser que se tenga regularidad suficiente, lo que se traduce en que los coeficientes tiendan rápidamente a cero. Por eso, sorprende la siguiente caracterización exacta, probada en [2], de la convergencia uniforme de las series de Fourier en seno con coeficientes monótonos en $\mathbb{R}^+$.

Teorema 4. *Si* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión positiva y decreciente, entonces la serie trigonométrica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(2\pi n x)$ *converge uniformemente en* $\mathbb{R}$ *si y solo si* $\lim n\, a_n = 0$.

Todo el argumento de su prueba es una aplicación elaborada de la sumación por partes. Llamaremos $S_N(x)$ a la N-ésima suma parcial de la serie, esto es, $\sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen}(2\pi n x)$. El siguiente ejercicio es para que repases los concepto básicos de análisis involucrados. Te puede resultar trivial si los dominas bien. Si no es así, buenas referencias son [1] y [5]. Escribe lo que necesites para entenderlo tú, desde un par de líneas (quizá con alguna referencia) a todo un párrafo.

5) Explica por qué la convergencia uniforme de la serie en $\mathbb{R}$ es equivalente a que se cumpla

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \ : \quad M > N > N_0 \quad \Rightarrow \quad \big|S_M(x) - S_N(x)\big| < \varepsilon \quad \forall x \in (0, 1/2).$$

Indicación: El estudio de la serie en $\mathbb{R}$ se puede restringir a $[0, 1/2]$ porque cada sumando es 1-periódico e impar.

En la prueba usaremos las bien conocidas desigualdades (*desigualdad de Jordan* [6])

$$\frac{2x}{\pi} \le \operatorname{sen} x \le x \qquad \text{para} \quad x \in [0, \pi/2]. \tag{1}$$

La primera se sigue de que $2x/\pi - \operatorname{sen} x$ es convexa en el intervalo y se anula en los extremos, la segunda se obtiene de que $x - \operatorname{sen} x$ es creciente y se anula en $x = 0$.

Ahora vamos con la implicación directa del Teorema 4. En primer lugar, es conveniente saber una identidad que quizá haya aparecido en algún ejercicio de Conjuntos y Números o de Matemática Discreta. Puedes proceder por inducción en $M - N$, aunque es más directo usar la fórmula del producto de senos.

6) Para enteros positivos $M > N$ demuestra $2 \operatorname{sen} t \sum_{n=N+1}^{M} \operatorname{sen}(2nt) = \cos\big((2N+1)t\big) - \cos\big((2M+1)t\big)$.

7) Si $n\, a_n \to 0$, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n\, a_n < \varepsilon/4$ para $n > N_0$. Con la desigualdad de Abel (Corolario 2), (1) y el ejercicio anterior, deduce $|S_M(x) - S_N(x)| < \varepsilon$ para $M > N > N_0$ y $x \in \big[\frac{1}{4N_0+4}, \frac{1}{2}\big)$.

8) Con la notación anterior, si $x \in \big(0, \frac{1}{4N_0+4}\big)$ explica por qué existe un entero positivo L tal que $\frac{1}{4(N_0+L+1)} \le x < \frac{1}{4(N_0+L)}$ y que

$$\big|S_M(x) - S_N(x)\big| \le \Big| \sum_{\substack{N<n\le M\\ n\le N_0+L}} a_n \operatorname{sen}(2\pi n x)\Big| + \Big| \sum_{\substack{N<n\le M\\ n>N_0+L}} a_n \operatorname{sen}(2\pi n x)\Big|$$

donde, como es habitual, los sumatorios vacíos se consideran nulos. Concluye $|S_M(x) - S_N(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$ usando $a_n \operatorname{sen}(2\pi n x) \le 2\pi x \epsilon/4$ en el primer sumatorio y procediendo como en el ejercicio anterior en el segundo.

Para terminar la prueba del Teorema 4 resta probar que si $n\, a_n \not\to 0$ entonces la serie no converge uniformemente.

9) Si $n\, a_n \not\to 0$ existe una constante $c_0 > 0$ y M arbitrariamente grande tal que $M\, a_M > c_0$. Usando (1) muestra que $\big|S_M(\frac{1}{4M}) - S_N(\frac{1}{4M})\big| > c_0/4$ con $N = \lfloor M/2 \rfloor$, lo que implica que no hay convergencia uniforme.

Finalicemos con un ejemplo. Si tienes dudas con las definiciones básicas de las series de Fourier, consulta por ejemplo [3] o pregunta. Si, por el contrario, conoces bien el análisis de Fourier, da un vistazo a la observación que sigue al ejercicio (olvídala si no la entiendes).

10) Comprueba que $f(x) = \frac{1}{2} - x + \lfloor x \rfloor$ admite una serie de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(2\pi n x)$ con $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ decreciente y decide si converge uniformemente usando el Teorema 4.

Observación: En realidad la última cuestión admite una solución inmediata sin el Teorema 4 apelando a la teoría de series de Fourier. Resultados conocidos de esta implican que hay convergencia puntual a f fuera de los puntos de discontinuidad y un teorema básico de análisis asegura que si una sucesión de funciones continuas es uniformemente convergente entonces tiene límite continuo.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. Enuncia los resultados como teoremas, proposiciones, etc. cuando lo consideres conveniente. Ten en cuenta que el TFG consiste en aprender un tema y, sobre todo, redactarlo bien. La extensión es libre con la recomendación de que no superes las 5 páginas con el formato de esta hoja o de la plantilla, sin contar la bibliografía. No pongas todos los detalles en los cálculos, únicamente lo suficiente para seguir los razonamientos. El resultado será el primer capítulo de tu TFG llamado *Sumación por partes* o la variante que prefieras.

Referencias

[1] T. M. Apostol. Mathematical analysis. 2nd ed. World Student Series Edition. Reading, Mass. etc.: Addison -Wesley Publishing Company. 483 p. $ 14.95 (1974)., 1974.

[2] T. W. Chaundy and A. E. Joliffe. The uniform convergence of a certain class of trigonometrical series. *Proc. Lond. Math. Soc. (2)*, 15:214–216, 1916.

[3] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals.* Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.

[4] D. S. Mitrinović and P. M. Vasić. *Analytic inequalities*, volume 165 of *Grundlehren Math. Wiss.* Berlin: Springer-Verlag, 1970.

[5] M. Spivak. *Calculus.* Cambridge: Cambridge University Press, corrected 3rd ed. edition, 2006.

[6] Wikipedia contributors. Jordan's inequality – Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Jordan%27s_inequality&oldid=1285635807`, 2025. [Online; accessed 22-August-2025].