Riemann, en su famosa y brevísima memoria de 1859 [2], su único trabajo de teoría de números, mostró que el error en el teorema de los números primos depende de

$$\sigma_0 = \sup\{\sigma > 0 \,:\, \zeta(\sigma + it) = 0 \text{ para algún } t \in \mathbb{R}\}.$$

Él mismo calculó con algunos decimales unos pocos ceros de ζ en $\Re(s) > 0$, de modo que el supremo anterior tiene sentido. Allí también surge la función $\mathrm{Li}(x) = \int_2^\infty \frac{dt}{\log t}$ como la natural para aproximar $\pi(x)$, así que cuando hablamos del error en el teorema de los primos, nos referimos a $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$. Ya sabes de la hoja anterior que, aunque $\pi(x)(\log x)/x$ y $\pi(x)/\mathrm{Li}(x)$ tiendan ambos a 1, la primera cantidad lo hace muy lentamente y $x/\log x$ resulta una malísima aproximación numérica para $\pi(x)$.

Un resultado que se considera "trivial" entre los expertos para σ_0 es el tema del primer ejercicio. Es fácil con lo que sabes, aunque quizá te cueste un poco sin indicaciones.

1) Demuestra que $\frac{1}{2} \le \sigma_0 \le 1$.

La famosa *hipótesis de Riemann* afirma que $\sigma_0 = \frac{1}{2}$, que es lo menor posible. Para que te hagas una idea de los pocos progresos en esta dirección, tras más de 150 años de investigación no se a mejorado ni un ápice la cota trivial: nadie conoce ningún $c < 1$ tal $\sigma_0 \le c$.

En el siguiente ejercicio y en el comentario que le sigue se recoge la formulación más habitual de la hipótesis de Riemann, que no habla de σ_0.

2) Explica por qué la hipótesis de Riemann es equivalente a que todos los ceros de $\zeta(s)$ estén en $\Re(s) = \frac{1}{2}$ excepto aquellos de la forma $s = -2n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$.

A los ceros $s = -2n$ se les llama *ceros triviales* y a $\Re(s) = \frac{1}{2}$ se le llama *línea crítica*. Por eso la hipótesis de Riemann se enuncia a menudo diciendo que todos los ceros no triviales de ζ están en la línea crítica.

El propósito de esta hoja es mostrar que cuanto más lejos estemos de la hipótesis de Riemann (cuanto mayor sea σ_0) más caótica será la distribución de los primos en el sentido de que aparecerán a la larga oscilaciones más grandes en la diferencia $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$. Concretamente, vamos a probar el siguiente resultado:

Teorema 1. *Supongamos $\sigma_0 \ne \frac{1}{2}$. Si el supremo que define σ_0 es un máximo, esto es, si existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\zeta(\rho_0) = 0$ con $\rho_0 = \sigma_0 + it_0$, entonces*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x) - \mathrm{Li}(x)}{x^{\sigma_0}/\log x} \ge \frac{1}{|\rho_0|} \qquad y \qquad -\frac{1}{|\rho_0|} \ge \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x) - \mathrm{Li}(x)}{x^{\sigma_0}/\log x}.$$

En particular, el límite no existe. Por otro lado, si el supremo no es máximo, entonces

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x) - \mathrm{Li}(x)}{x^{\sigma}} = -\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x) - \mathrm{Li}(x)}{x^{\sigma}} = +\infty \qquad \textit{para cualquier } \sigma < \sigma_0.$$

Este teorema motiva la hipótesis de Riemann, pues implica que la situación menos caótica solo se puede dar si $\sigma_0 = \frac{1}{2}$.

Por otro lado, se sabe que bajo la hipótesis de Riemann el error está acotado por un exponente arbitrariamente cercano a $1/2$ y no es posible bajar más. Concretamente, que la hipótesis de Riemann implica

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x) - \mathrm{Li}(x)}{x^{1/2}(\log x)^2} = 0$$

y, sin embargo, el límite superior y el negativo del inferior son ∞ si $(\log x)^2$ se reemplaza por $(\log x)^{-1}$. Ambas afirmaciones son largas de probar y se salen de los contenidos de tu trabajo. Por si quieres mencionar o conocer referencias, lo primero está en [1] (en realidad $(\log x)^2$ se puede cambiar por cualquier función que dividida por $\log x$ tienda a ∞) o en [6] con constantes explícitas. Lo segundo está en [3, Ch. 6] o el clásico [4].

La prueba del Teorema 1 emplea un resultado debido a Landau. Aunque es de variable real y compleja, yo únicamente lo he visto aplicar en teoría de números. Doy un enunciado ligeramente distinto del habitual [5], [3], que se ajusta mejor a lo que vamos a hacer. Si hay problemas de espacio su prueba podría ir a un apéndice o ser sustituida por una referencia.

Teorema 2 (Lema de Landau)**.** *Sea $f : [2,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integrable tal que $f(x)/x$ sea positiva y acotada para x mayor que cierto x_0. Si la trasformada integral*

$$L_f(s) = \int_2^\infty \frac{f(x)}{x^{s+1}}\,dx$$

se extiende a una función holomorfa en algún abierto que contiene a un intervalo $(\sigma, 1]$ con $0 < \sigma < 1$, entonces la integral converge en $\Re(s) > \sigma$ y es holomorfa allí.

El resultado es chocante tras la demostración del teorema de los números primos de la hoja anterior en la que hubo que hacer un argumento complicado porque la extensión holomorfa no implicaba la convergencia. La nueva hipótesis clave en el Teorema 2 es la positividad.

Por dar un ejemplo bastante trivial, nota que la siguiente fórmula se deduce de lo que sabes de la primera hoja:

$$\frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s} = \int_1^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}}\,dx.$$

La extensión holomorfa del primer miembro en un abierto que contiene a $(0,1]$ implica la convergencia de $L_f(s)$ con $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ en $\Re(s) > 0$ (¿ves que el 2 en el límite inferior de la integral no es relevante?), lo cual es evidente. Por otro lado, esta fórmula tan simple dice algo nada evidente de los ceros reales de ζ que merece la pena reseñar.

3) Utiliza $x - \lfloor x \rfloor \geq 0$ para demostrar que $\zeta(s)$ no se anula para $s \in (0,1)$.

El plan en lo que resta es deducir con detalle la primera parte del Teorema 1 para el límite superior y dejar que pienses por qué el resto es similar. Suponemos entonces que el supremo es un máximo y llamamos $\rho_0 = \sigma_0 + it_0$ al cero más a la derecha de la función ζ. Como sabemos que no hay ceros en $\Re(s) = 1$, se tiene $1/2 < \sigma_0 < 1$. Dado $\ell > 0$ cualquier número mayor que el límite superior de la primera parte del Teorema 1 vamos a aplicar el Lema de Landau a

$$f(x) = -\pi(x) + \mathrm{Li}(x) + \frac{\ell x^{\sigma_0}}{\log x}.$$

Debería resultarte evidente que $f(x)/x$ es positiva y acotada para x grande.

4) Prueba que para $g(x) = -\pi(x)$ la función $L_g(s) + s^{-1}\log\zeta(s)$ tiene una extensión holomorfa a $\Re(s) > 1/2$. Nota: Aunque $\log\zeta(s)$ se vuelva malamente singular y multivaluada en las cercanías de un cero, está bien definida en $\Re(s) > 1$. Extendemos $L_g(s) + s^{-1}\log\zeta(s)$ de esta región a otra mayor, nunca sustituimos un s con $\Re(s) \le 1$ en $\log\zeta(s)$.

Ahora vamos a estudiar L_g para los otros dos términos que conforman f. Soy consciente de que las indicaciones son un poco crípticas. Si tienes dudas, pregunta.

5) Prueba que para $g(x) = x^\sigma/\log x$ con $\sigma \le 1$ la función $L_g(s) + \log(s-\sigma)$ admite una extensión entera. Indicación: Considera su derivada.

6) Sean $g_1(x) = \mathrm{Li}(x)$ y $g_2(x) = x/\log x$. Demuestra que $sL_{g_1}(s) - L_{g_2}(s)$ tiene una extensión entera. Indicación: Integra por partes.

7) Deduce de lo anterior y del Teorema 2 que $L_f(s)$ converge en $\Re(s) > \sigma_0$ y que

$$L_f(s) + s^{-1}\log\big((s-1)\zeta(s)\big) + \ell\log(s-\sigma_0)$$

tiene una extensión holomorfa a algún abierto que contiene a $\Re(s) \ge \sigma_0$. Indicación: Esto es sencillo, aunque no inmediato. Como en la hoja anterior, hay algo de topología general en la última afirmación.

La forma en que se procede a la conclusión del resultado, es muy curiosa. La clave es que la función que aproxima $L_f(s)$, salvo una función holomorfa, tiene una singularidad real y otra compleja. La segunda no puede dominar a la primera porque los números complejos inducen alguna cancelación en la integral.

8) Sea C una constante tal que $g(x) = f(x) + C \ge 0$ en $[2,\infty)$. Explica por qué la desigualdad $L_g(s)/|L_g(s+it_0)| \ge 1$ es evidente para s real (con $s > \sigma_0$ para asegura la convergencia). Muestra que el límite del primer miembro cuando $s \to \sigma_0^+$ es $\ell|\rho_0|/m$ con m la multiplicidad de ρ_0 y deduce de ello el resultado esperado.

Lo que resta del Teorema 1 son variantes.

9) Escribe unas líneas para tu trabajo explicando por qué el caso del límite inferior en la primera parte del Teorema 1 es igual cambiando f de signo y sustituyendo ℓ por un número menor que el límite inferior.

10) Si el supremo no fuera máximo, cambiando en el razonamiento anterior ρ_0 por un cero $\rho_0' = \sigma_0' + it_0'$ con $1/2 < \sigma_0' < \sigma_0$, llegaríamos a una contradicción tras aplicar el Lema de Landau, pues $L_f(s)$ convergería en $\Re(s) > \sigma_0'$ y $L_f(s) + s^{-1}\log\big((s-1)\zeta(s)\big) + \ell\log(s-\sigma_0')$ sería holomorfa allí, lo cual es incompatible con que ζ tiene (infinitos) ceros en dicha región. La única manera de escapar de esta contradicción es que no podamos escoger ℓ, esto es, que el límite superior sea ∞.

Lo que falta es la demostración del Teorema 2. La descompongo en dos ejercicios. El primero es el que supongo que te constará más. Como he dicho, no estoy seguro de si es conveniente incluir la prueba en primera instancia.

Con la notación empleada allí, definimos

$$\sigma' = \text{ínf}\,\big\{\delta > \sigma \,:\, L_f(s) \text{ converge para } \Re(s) > \delta\big\}.$$

El teorema se sigue si $\sigma' > \sigma$ lleva a una contradicción. La holomorfía se puede obtener como consecuencia del teorema de Morera y podemos suponer $f \ge 0$ en $[2,\infty)$ redefiniéndola como cero en $[2, x_0]$ porque esa parte de la integral es una función entera y un intervalo finito no afecta a la convergencia.

11) Demuestra que $\text{lím}_{N\to\infty} \int_2^N x^{-1-\delta} f(x)\,dx = \infty$ para todo $\delta < \sigma'$. Indicación: Decir que una integral impropia no converge (en sentido Riemann) es lo mismo que decir que $\int_N^M$ no tiende a cero cuando $N, M \to \infty$.

12) Sean σ_+ y σ_- con $\sigma < \sigma_- < \sigma' < \sigma_+$ suficientemente cercanos para que σ_- pertenezca a un disco centrado en σ_+ en el que $L_f(s)$ tiene extensión holomorfa, llamémosla F. Se cumple

$$F(\sigma_-) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_f^{(n)}(\sigma_+)}{n!}(\sigma_- - \sigma_+)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma_+ - \sigma_-)^n}{n!} \int_2^\infty \frac{f(x)(\log x)^n}{x^{1+\sigma_+}}\,dx.$$

Explica por qué restringiendo la integral a $[2, N]$ se sigue que $\int_2^N x^{-1-\sigma_-} f(x)\,dx$ está uniformemente acotada por $|F(\sigma_-)|$, contradiciendo el ejercicio anterior.

Tarea a entregar. Escribe un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. La extensión depende mucho de hasta qué punto das detalles de las diferentes partes del primer teorema y de si incluyes la prueba del segundo. No te doy, por tanto, ninguna recomendación. El resultado debe componer un quinto y último capítulo de tu TFG llamado *La hipótesis de Riemann* o la variante que prefieras.

Referencias

[1] H. Davenport. *Multiplicative number theory*, volume 74 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2000. Revised and with a preface by H. L. Montgomery.

[2] H. M. Edwards. *Riemann's zeta function*. Academic Press, New York-London, 1974. Pure and Applied Mathematics, Vol. 58.

[3] W. J. Ellison. *Les nombres premiers*. Hermann, Paris, 1975. En collaboration avec M. Mendès France, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, No. IX, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1366.

[4] A. E. Ingham. *The distribution of prime numbers*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. Reprint of the 1932 original, With a foreword by R. C. Vaughan.

[5] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. *Multiplicative number theory. I. Classical theory*, volume 97 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[6] L. Schoenfeld. Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. II. *Math. Comp.*, 30(134):337–360, 1976.