Toda esta hoja está dedicada a probar uno de los resultados más famosos acerca de la distribución de los primos. Es el *teorema de los números primos* que da la asintótica de la función $\pi(x)$ de la hoja anterior. Concretamente:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1 \qquad \text{donde} \quad \pi(x) = \#\{p \le x\}. \tag{1}$$

En términos intuitivos, afirma que la probabilidad de que un entero positivo de tamaño N sea primo es aproximadamente $1/\log N$. Este límite es, en realidad, un poco engañoso, pues la convergencia a 1 es muy lenta y se sabe, como ya observó experimentalmente Gauss, que la función "buena" para aproximar $\pi(x)$ es $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ de forma que $\pi(x)/\mathrm{Li}(x)$ tiende mucho más rápido a 1. Esto tiene que ver con la memoria de Riemann [1] y su famosa hipótesis que exploraremos en la última hoja.

Las primeras pruebas de (1) las obtuvieron independientemente Hadamard y de la Vallée Poussin en 1896. Eran largas y estaban basadas en variable compleja aplicada a la función ζ. Durante años, el sentir general fue que estas técnicas eran inevitables para probar (1) hasta que Erdős y Selberg dieron con sendas pruebas "elementales", sin la función ζ ni variable compleja ni tampoco variable real, pero bastante complicadas. En la actualidad, una prueba de 1980 debida a Newman [3] se ha hecho muy famosa por su brevedad (incrementada tras [4]). Emplea la idea clásica incorporando unas reducciones muy drásticas. Es la que seguiremos en esta hoja. Por si tienes curiosidad, en [2] hay otra prueba más original y también breve, su inconveniente es que no da el teorema de los números primos con el enunciado convencional (1) sino con otro más feo, bien conocido por los expertos, y probar la equivalencia lleva algún trabajo.

A pesar de las reducciones, esta hoja es larga y capturar la idea general es muy difícil sin tener conocimientos previos de teoría analítica de números.

Un ingrediente analítico fundamental para la prueba de (1) es el hecho de que ζ no tiene ceros en $\Re(s) = 1$. Aunque no lo veremos aquí, se puede probar que un solo cero en esa línea implicaría que $\pi(x)(\log x)/x - 1$ se comporta como una función oscilatoria del tipo $a\,\mathrm{sen}(b\log x)$ y por tanto el límite no existiría.

1) Para $\sigma > 1$ y $t_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ prueba

$$(1-\sigma)\sum_{k=-2}^{2}\binom{4}{2+k}\frac{\zeta'(\sigma+ikt_0)}{\zeta(\sigma+ikt_0)} = (\sigma-1)\sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\big(n^{it_0/2}+n^{-it_0/2}\big)^4 \ge 0.$$

Tomando límites $\sigma \to 1^+$ en esta desigualdad, deduce que si ζ tiene un cero de orden m en $1+it_0$ entonces $\binom{4}{2} - m\binom{4}{3} - m\binom{4}{1} \ge 0$, lo cual es imposible para $m \ge 1$.

2) Explica brevemente por qué el ejercicio anterior y lo que sabes de la extensión meromorfa de F en la pasada hoja, implican que existe un abierto $\mathcal{U} \supset \{\Re(s) \ge 1\}$ tal que

$$G(s) = \int_1^\infty \big(\vartheta(x) - x\big)\frac{dx}{x^{s+1}} \quad \text{tiene una extensión holomorfa a } \mathcal{U}. \tag{2}$$

La gran reducción de Newman consiste en un argumento razonablemente breve que muestra que (2) implica

$$\mathcal{I}(a,b) = \int_a^b \big(\vartheta(x) - x\big)\frac{dx}{x^2} \to 0 \qquad \text{cuando} \quad b > a \to \infty. \tag{3}$$

Si recuerdas el cálculo de primero, esto equivale a decir que la integral impropia $\int_1^\infty$ converge.

Con argumentos más o menos rutinarios de cálculo infinitesimal, se deduce de ello el teorema de los números primos. En resumen, el esquema de la prueba es

$$\boxed{(2) \ \Rightarrow \ (3) \ \Rightarrow \ (1)}$$

Los cuatro ejercicios siguientes muestran la segunda implicación por contradicción, es decir, veremos que si no se cumple (1) entonces (3) no puede darse.

Si (1) fuera falso, o bien $\limsup > 1$ o bien $\liminf < 1$ (o ambas cosas). Probaremos con detalle por qué lo primero contradice (3). Para el límite inferior el argumento es similar, aunque más sencillo. Pongo unos comentarios al final.

Si el límite superior es mayor que 1, por definición, existe una constante $L > 1$ y una sucesión positiva $x_n \to \infty$ tal que $\pi(x_n)\log x_n > Lx_n$.

3) Sea $\beta = \frac{L+1}{2L}$. Justifica para $x \ge x_n$ las desigualdades

$$\vartheta(x) \ge \beta\big(\pi(x_n) - \pi(x_n^\beta)\big)\log x_n \ge \frac{L+1}{2}x_n - \beta x_n^\beta \log x_n.$$

4) Deduce

$$\mathcal{I}(x_n, Lx_n) \ge \frac{L^2-1}{2L} - \log L + c_n \qquad \text{con} \quad c_n \to 0.$$

5) Demuestra que $\frac{L^2-1}{2L} - \log L$ es una constante estrictamente positiva y concluye que (3) no puede darse, llegando a una contradicción. Indicación: Estudia el crecimiento de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{2x} - \log x$ en $[1,\infty)$.

El argumento para deducir que el límite inferior no puede ser menor que un $\ell < 1$ es algo más sencillo porque en lugar de las desigualdades iniciales, solo se necesita $\vartheta(x) \le \pi(x_n)\log x_n$ para $x \le x_n$, que es trivial. Con ello se obtiene $\mathcal{I}(\ell x_n, x_n) \le 1 - \ell + \log \ell$ que es una constante estrictamente negativa.

6) Escribe alguna línea para tu trabajo sobre el caso del límite inferior sin poner todos los detalles.

Para completar la prueba de (1), nos falta la implicación (2) $\Rightarrow$ (3) a la que dedicaremos el resto de la hoja. Dicha implicación se deduce de una aplicación de la fórmula integral de

Cauchy que requiere varias acotaciones. No he incluido indicaciones en los ejercicios y algunos pueden suponer un pequeño reto. Si necesitas ayuda, pregunta. En cierto paso se necesita que la función $\vartheta(x)/x$ esté acotada. El siguiente ejercicio consigue este propósito con una constante explícita (cuyo valor es indiferente para lo que sigue).

7) Demuestra $\vartheta(x)/x \le 4\log 2$ para $x > 1$ escogiendo $k \in \mathbb{Z}^+$ con $x \in (2^{k-1}, 2^k]$ y justificando las desigualdades:

$$\vartheta(x) \le \sum_{j=1}^{k} \big(\vartheta(2^j) - \vartheta(2^{j-1})\big) \le \sum_{j=1}^{k} \log \binom{2^j}{2^{j-1}} \le \sum_{j=1}^{k} \log 2^{2^j} \le 4x\log 2.$$

Consideremos la región $D = \{s \in \mathbb{C} \,:\, |s| \le R,\ \Re(s) > -\delta\}$ con $R > 1 > \delta > 0$. Es un hecho sencillo de topología general que para cualquier R siempre podemos escoger un δ tal que $\{s+1 \,:\, s \in D\} \subset \mathcal{U}$ para el $\mathcal{U}$ de (2). Si no lo ves claro, piénsalo. Definamos ahora algunas funciones. Sea G_c con $c > 1$ igual que G en (2), pero limitando la integral al intervalo $[1, c]$. Sean también

$$h_c(s) = c^s\Big(1 + \frac{s^2}{R^2}\Big), \qquad B_c(s) = G_c(s+1)h_c(s) \qquad \text{y} \qquad A_c(s) = B_c(s) - G(s+1)h_c(s).$$

Por (2) todas estas funciones son holomorfas en un abierto que contiene a D. De hecho, h_c, G_c y B_c son enteras. Realmente, (2) solo se utiliza para que la fórmula del siguiente ejercicio (que debería resultarte fácil) tenga sentido.

8) Explica por qué

$$\mathcal{I}(a,b) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \big(A_b(s) - A_a(s)\big)\,\frac{ds}{s}.$$

Descompongamos la frontera como $\partial D = C_1 \sqcup C_2$ con C_1 la semicircunferencia derecha $\{|s| = R,\ \Re(s) \ge 0\}$ y C_2 el resto.

9) Teniendo en cuenta que $h_c(s)$ tiende exponencialmente a cero cuando $c \to \infty$ para cada $s \in C_2$, explica con todo rigor que (3) se sigue si se prueba que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $R > 1$ tal que

$$J_1 = \left|\int_{C_1} \big(A_b(s) - A_a(s)\big)\,\frac{ds}{s}\right| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad J_2 = \left|\int_{C_2} \big(B_b(s) - B_a(s)\big)\,\frac{ds}{s}\right| < \varepsilon.$$

10) Abreviemos $\sigma = \Re(s)$. Muestra que para $s \in C_1$ se tiene $|h_c(s)| = 2R^{-1}\sigma c^{\sigma}$ y $|G_c(s+1) - G(s+1)| \le K\sigma^{-1}c^{-\sigma}$ para cierta constante y concluye que J_1 es arbitrariamente pequeño cuando R crece.

11) Sea C_3 la curva simétrica de C_1, esto es, $C_3 = \{|s| = R, \Re(s) < 0\}$. Explica por qué $J_2 = \big|\int_{C_3}\big|$ y aplica un argumento similar al del ejercicio anterior para obtener el mismo resultado.

Tarea a entregar. Como en anteriores ocasiones, debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. Sé que esta hoja tiene bastantes detalles. Mi consejo es que no los expliques demasiado e intentes que todo se ajuste en a lo más siete páginas con el formato de esta hoja o de la plantilla. Incluye lo que quieras de las observaciones históricas que cuento al principio u otras que encuentres. El resultado debe dar lugar a un cuarto capítulo de tu TFG llamado *El teorema de los números primos* o la variante que prefieras.

Referencias

[1] H. M. Edwards. *Riemann's zeta function.* Academic Press, New York-London, 1974. Pure and Applied Mathematics, Vol. 58.

[2] H. Iwaniec. *Lectures on the Riemann zeta function*, volume 62 of *University Lecture Series.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[3] D. J. Newman. *Analytic number theory*, volume 177 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[4] D. Zagier. Newman's short proof of the prime number theorem. *Amer. Math. Monthly*, 104(8):705–708, 1997.