El mayor interés de la función ζ es aritmético, pues desempeña un papel fundamental para entender la distribución de los números primos. Aunque tu TFG tenga una orientación más bien analítica, es ineludible discutir la conexión con la teoría de números. Dedicaremos esta hoja a ver la relación con algunas funciones aritméticas, lo cual nos allanará el camino para probar en la siguiente el resultado más emblemático sobre la distribución de los primos.

La conexión con los números primos viene del llamado *producto de Euler*, con el que Euler obtuvo diversos resultados aritméticos:

$$\zeta(s) = \prod \big(1 - p^{-s}\big)^{-1} \qquad \text{donde } p \text{ recorre los primos.}$$

Esta fórmula suena muy razonable cuando se escribe $\big(1-p^{-s}\big)^{-1} = 1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+\dots$ y se efectúa formalmente el producto infinito de las sumas infinitas. Para Euler no era necesario decir más e incluso hoy en día se usa ese argumento para no entrar en complicaciones. Sin embargo, con el rigor actual, hacer productos infinitos de sumas infinitas es un poco inquietante. Esa es la motivación para el siguiente ejercicio.

1) Lee en [3] la página 19 y la 20 hasta el final de la demostración del Teorema 1.9 (te pasaré una copia de las dos páginas). Con lo que has aprendido, escribe una prueba rigurosa de que la fórmula producto es cierta para $\Re(s) > 1$.

En lo que has leído, has aprendido también algo acerca de las funciones multiplicativas. Los dos ejercicios siguientes no son estrictamente necesarios para nuestros propósitos, pero servirán para que practiques con la función ζ.

2) Sea $d(n)$ la función que da el número de divisores de n. Por ejemplo, $d(12) = 6$ y $d(17) = 2$. Prueba que es multiplicativa, pero no completamente multiplicativa. Haz lo mismo con $\varphi(n)$, la función de Euler que te definieron en Conjuntos y Números, que cuenta los enteros en $[1, n]$ que son coprimos con n.

3) Prueba las identidades

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} \qquad \text{y} \qquad \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}.$$

Indicación: Usa [3, (1.14)]. La primera es válida en $\Re(s) > 1$ y la segunda en $\Re(s) > 2$, pero no hace falta que justifiques estas regiones de convergencia óptimas.

Si tienes curiosidad, en [1] o en [2, Ch. 1] hay otras muchas identidades que relacionan ζ con funciones multiplicativas. En teoría analítica de números, una estrategia común es tratar de despejar en estas identidades las funciones aritméticas a partir de la función ζ empleando transformadas integrales.

Una función rara que aparece de forma natural en relación con la función ζ es la llamada *función de von Mangoldt*:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Aquí p representa un primo genérico. Por ejemplo, $\Lambda(3) = \Lambda(3^{20}) = \log 3$ y $\Lambda(2024) = 0$.

Evidentemente, esta función no es multiplicativa, por tanto, lo que has leído en [3] es de poco uso para el siguiente ejercicio.

4) Prueba

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad \text{para} \quad \Re(s) > 1.$$

Indicación: ¿Qué operación analítica transforma f en f'/f?

Después de estas incursiones aritméticas, vamos a volver al lado del análisis, aunque todavía con algunas referencias a los números primos.

5) Sea $\mathcal{Z} = \{\rho \in \mathbb{C} : \zeta(\rho) = 0\}$. Demuestra que $-\zeta'(s)/\zeta(s) - (s-1)^{-1}$ es holomorfa en el abierto $\mathcal{U} = \mathbb{C} - \mathcal{Z}$ y tiene polos simples en los elementos de $\mathcal{Z}$. Por cierto, ¿tienes claro que $\mathcal{U}$ es un abierto?

La función de von Mangoldt es un poco rara y en la demostración simplificada del teorema de los números primos de la próxima hoja la evitaremos pasando de $-\zeta'/\zeta$ a la función

$$F(s) = \sum \frac{\log p}{p^s} \qquad \text{donde } p \text{ recorre los primos.}$$

Esta función está bien definida como función holomorfa en $\Re(s) > 1$ (¿lo ves claro?). Lo importante es que imita a $-\zeta'/\zeta$ en una región más amplia en el sentido de que no introduce nuevas singularidades.

6) Demuestra que $\zeta'(s)/\zeta(s) + F(s)$ admite una extensión holomorfa a $\Re(s) > \frac{1}{2}$.

Definamos ahora para $x \in \mathbb{R}$ la función

$$\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p.$$

Como antes, aquí p recorre los primos. Parece un poco absurdo permitir que x sea real, porque toda la información de la función está en los primos. De todas formas, es conveniente para tener la representación integral del siguiente ejercicio.

7) Demuestra que

$$F(s) = s\int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}}\,dx \qquad \text{para} \quad \Re(s) > 1.$$

Es parte del problema justificar la convergencia de la integral en la región indicada.

El próximo ejercicio es puramente analítico, no hay nada de aritmética involucrado. Es breve, pero quizá sea el que te cueste más de la hoja.

8) Suponiendo la existencia del límite

$$\ell = \lim_{x\to+\infty} \frac{\vartheta(x)}{x},$$

prueba que $\ell = 1$, justificando con todo rigor el argumento. Indicación: Piensa en el comportamiento de $(s-1)F(s)$ cuando $s \to 1^+$ en el ejercicio anterior.

9) Siempre suponiendo la existencia de ℓ, concluye que para cualquier $\alpha > 1$ existe un n_0 tal que el intervalo $(n, \alpha n]$ contiene un primo para todo $n > n_0$.

En un primer contacto con la teoría, parece conveniente cambiar $\Lambda(n)$ por la función indicadora de los primos y que así aparezca directamente su función contadora. Sin embargo, eso da lugar a dificultades técnicas relacionadas con que al tomar logaritmos de funciones meromorfas tendremos problemas de multivaluación en las cercanías de los polos y de los ceros. Sin entrar en los detalles exactos, te propongo el siguiente problema que muestra la aparición de logaritmos.

10) Sea $\pi(x) = \#\{p \le x\}$ la función contadora de los primos. Muestra que

$$\log\zeta(s) = s\int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x(x^s-1)}\,dx \qquad \text{para} \quad \Re(s) > 1.$$

La definición de $\log\zeta(s)$ no es problemática en $\Re(s) > 1$ porque la función ζ no tiene ceros en esa región (piensa en la fórmula producto).

Tarea a entregar. Como en anteriores ocasiones, debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. Esta hoja es más breve que las anteriores y sugiero que no llegues a completar 6 página con el formato de esta hoja o de la plantilla. Si te falta espacio, lo de $\pi(x)$ es prescindible y lo de las funciones multiplicativas también. El resultado debe dar lugar a un tercer capítulo de tu TFG llamado *Relación con funciones aritméticas* o la variante que prefieras.

Referencias

[1] W. J. Ellison. *Les nombres premiers*. Hermann, Paris, 1975. En collaboration avec M. Mendès France, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, No. IX, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1366.

[2] H. Iwaniec. *Lectures on the Riemann zeta function*, volume 62 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[3] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. *Multiplicative number theory. I. Classical theory*, volume 97 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.