En esta hoja estudiaremos una sorprendente simetría de la función ζ que en particular implica la extensión de $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ a una función entera. La probó Riemann en su famosa memoria sobre los números primos [4], aunque hay algún antecedente en el trabajo de Euler. Para enunciar y demostrarla, es necesario conocer antes una función clásica de variable compleja. Quizá te la hayan mencionado brevemente en algún curso y algunos de los ejercicios no sean nuevos para ti.

Definimos la *función* Γ en $\Re(s) > 0$ mediante la integral

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx.$$

Si no ves claro que converge, piénsalo un poco.

1) Integrando por partes, deduce que se cumple $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ y explica por qué esto permite deducir que Γ tiene una extensión meromorfa a $\{\Re(s) > -1\}$ con un único polo en $s = 0$ con residuo igual a 1.

2) Repitiendo la idea del ejercicio anterior, prueba que Γ admite una extensión meromorfa a $\mathbb{C}$ tal que los polos están en $\mathbb{Z}_{\le 0}$ y todos ellos son simples.

3) Comprueba que la función Γ generaliza el factorial en el sentido de que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. De hecho, históricamente, Γ surgió interpolando factoriales [3].

A continuación vamos a probar la fórmula

$$\Gamma(s)\int_0^\infty x^{w-1}(1+x)^{-s}\,dx = \Gamma(s-w)\Gamma(w) \tag{1}$$

que nos servirá para probar dos simetrías inesperadas de la función Γ. Aquí se entiende que $\Re(w) > 0$ y $\Re(w-s) < 0$ para asegurar la convergencia de la integral, pero, por extensión meromorfa, las simetrías que obtendremos serán generales.

4) Escribe el primer miembro de (1) como $\int_0^\infty\int_0^\infty x^{w-1}(1+x)^{-s}y^{s-1}e^{-y}\,dxdy$ y efectuando un cambio de variable $x = u/v$, $y = u+v$, muestra cómo obtener el segundo término, completando así la prueba de (1).

Hay una consecuencia que es digna de mención:

5) Si $\Gamma(s) = 0$ con $\Re(s) > 0$. Explica por qué (1) con $w = 1/n$ y n arbitrariamente grande, lleva a una contradicción. Concluye que $1/\Gamma$ define una función entera en $\mathbb{C}$ cuyos ceros están en $\mathbb{Z}_{\le 0}$.

La primera simetría de Γ, la más famosa, se obtiene con el teorema de los residuos.

6) Tomando $s = 1$ en (1) y aplicando el teorema de los residuos para evaluar integrales, deduce la *fórmula de reflexión*

$$\Gamma(1-w)\Gamma(w) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi w)} \qquad \text{para} \quad w \in \mathbb{C} - \mathbb{Z},$$

lo que implica $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, porque claramente $\Gamma(1/2) \in \mathbb{R}^+$. Indicación: Considera un dominio de tipo "cerradura" donde el ojo de la cerradura rodea al origen y de él parten dos ramas que pasan ligeramente por encima y por debajo del eje real positivo. La determinación natural del ángulo es de 0 a 2π. Si no tienes mucha práctica con el cálculo de estas integrales mediante el teorema de los residuos, mira por ejemplo [1].

La segunda simetría requiere cierta manipulación previa de la integral.

7) Con el cambio de variable $x = \frac{(y-1)^2}{4y}$, comprueba

$$\int_0^\infty x^{-1/2}(1+x)^{-s}\,dx = 2^{2s-1}\int_0^1 y^{s-3/2}(1+y)^{1-2s}\,dy = 2^{2s-1}\int_1^\infty y^{s-3/2}(1+y)^{1-2s}\,dy$$

y concluye que estas tres integrales coinciden con $2^{2s-2}\int_0^\infty y^{s-3/2}(1+y)^{1-2s}\,dy$.

8) De la conclusión del ejercicio anterior y de (1) deduce la *fórmula de duplicación*

$$\Gamma(z)\Gamma\big(z+\frac{1}{2}\big) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z),$$

que para $z = 1/2$ da una prueba más de $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Indicación: Toma $s = z + \frac{1}{2}$ y $w = \frac{1}{2}$ en (1), utiliza la identidad integral del ejercicio anterior y compara el resultado con lo obtenido al sustituir $s = 2z$ y $w = z$.

Después de este análisis detallado de la función Γ, nos dirigimos hacia nuestro objetivo en esta hoja que es encontrar una simetría de la función ζ. Para ello, un resultado auxiliar será la igualdad:

$$\text{(2)} \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/t} \qquad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Es muy posible que la hayas visto en algún curso de ecuaciones o análisis. Sea o no el caso, te propongo que escribas una prueba siguiendo las líneas esbozadas en el próximo ejercicio.

9) Sea $F(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(m+x)^2 t}$. Como es 1-periódica y regular, coincide con su desarrollo de Fourier: $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x}$ con $a_n = \int_{-1/2}^{1/2} F(x)e^{-2\pi i n x}\,dx$. Demuestra que se tiene $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t x^2 - 2\pi i n x}\,dx$ y deduce (2) calculando $F(0)$. Indicación: Para completar este esquema, necesitarás saber $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2-2\pi ixy}\,dx = e^{-\pi y^2}$. Si esta integral no te suena, mira o cita [5, Ex. 10.9] o [6].

Ahora estamos preparados para probar la simetría de ζ siguiendo la idea original de Riemann en su famosa memoria [2, §8], [4].

10) Considera la función $\omega : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *de decaimiento rápido*[1] $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$. Muestra que satisface

$$\omega(x^{-1}) = \frac{\sqrt{x}-1}{2} + \sqrt{x}\,\omega(x) \qquad \text{para cualquier } x > 0.$$

11) Sea $\xi(s) = s(1-s)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. Utilizando las definiciones originales de ζ y de Γ, como serie e integral, demuestra para $\Re(s) > 1$

$$\xi(s) = s(1-s)\int_0^{\infty} x^{s/2-1}\omega(x)\,dx.$$

Efectuando el cambio $x \mapsto 1/x$ en el intervalo $(0,1]$ del rango de integración, deduce también

$$\xi(s) = -1 + s(1-s)\int_1^{\infty} \big(x^{s/2-1} + x^{(1-s)/2-1}\big)\omega(x)\,dx.$$

12) A partir de la expresión anterior, demuestra los siguientes puntos:

1. $\xi(s)$ se extiende a una función entera.
2. $\zeta(s) - 1/(s-1)$ se extiende a una función entera.
3. Se cumple $\xi(s) = \xi(1-s)$ para todo $s \in \mathbb{C}$.

El último punto es la simetría que buscábamos, lo que se llama *la ecuación funcional* por antonomasia que permite relacionar $\zeta(s)$ y $\zeta(1-s)$. El factor $s(1-s)$ es irrelevante porque es invariante bajo $s \mapsto 1-s$, solo se introduce para tener una función entera. Por ello, la ecuación funcional se suele presentar en la forma:

$$\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\zeta(1-s).$$

Por cierto, mira [7, Ch. II] si quieres ver otras pruebas de esta identidad. También hay una forma “no simétrica”, algo menos habitual:

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\,\mathrm{sen}\Big(\frac{\pi s}{2}\Big)\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

[1] Se dice que una función es de decaimiento rápido si es C^{∞} y ella y sus derivadas de cualquier orden tienden a cero cuando $x \to \infty$ al multiplicar por x^N, sea cual sea N.

13) Con lo que sabes de la función Γ, prueba que la forma simétrica de la ecuación funcional y la no simétrica son equivalentes.

14) Calcula $\zeta(0)$, $\zeta(-1)$, $\zeta(-2)$, $\zeta(-3)$ y $\zeta(-4)$ empleando la ecuación funcional.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. La extensión es libre con una fuerte recomendación de que no llegues a las 7 páginas, sin contar la bibliografía, con el formato de esta hoja o de la plantilla. Si te ves muy apurado, suprime lo relativo a la fórmula de duplicación y la forma no simétrica de la ecuación funcional. Es importante que trates de combinar las soluciones de los ejercicios en vez de pegarlas por separado. El resultado debe dar lugar a un primer capítulo de tu TFG llamado *La ecuación funcional* o la variante que prefieras.

Referencias

[1] R. V. Churchill and J. Ward Brown. *Complex variables and applications.* McGraw-Hill Book Co., New York, fourth edition, 1984.

[2] H. Davenport. *Multiplicative number theory*, volume 74 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, third edition, 2000. Revised and with a preface by H. L. Montgomery.

[3] J. Dutka. The early history of the factorial function. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 43(3):225–249, 1991.

[4] H. M. Edwards. *Riemann's zeta function.* Academic Press, New York-London, 1974. Pure and Applied Mathematics, Vol. 58.

[5] H. L. Montgomery. *Early Fourier analysis*, volume 22 of *Pure and Applied Undergraduate Texts.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[6] Pr∞fWiki contributors. Fourier Transform of Gaussian Function — Pr∞fWiki. `https://proofwiki.org/w/index.php?title=Fourier_Transform_of_Gaussian_Function&oldid=668452`, 2023. [Online; accessed 26-December-2023].

[7] E. C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1986. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.