Esta hoja y las sucesivas, la previsión es que haya cinco en total, las iré poniendo en `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/tfg.html` donde se encuentra la propuesta inicial de los contenidos. La fuente LaTeX, en los ficheros `CC24hoja*.tex`, te será muy útil como plantilla y para poder copiar fórmulas y referencias. Más o menos imita el formato indicado en la guía docente. De todas formas, seguramente es más adecuado, para ahorrar tiempo, que las entregas de cada hoja las incluyas en la plantilla oficial del TFG que puedes descargar en Moodle.

La función protagonista de tu trabajo, es la *función ζ de Riemann*[1] que se define a través de una serie como la función compleja

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{para} \quad \Re(s) > 1.$$

Su interés proviene de que está íntimamente ligada a la distribución de los números primos aunque hasta la próxima hoja no empezaremos a entrar en ello. Curiosamente, en esta relación con los primos es fundamental considerar s complejo (por tradición se usa este nombre de la variable en vez de la z típica de variable compleja).

El propósito la presente hoja es tratar algunas de sus propiedades desde el punto de vista del análisis. Comenzamos estudiando cuándo tiene sentido la definición anterior de ζ.

1) Muestra que la serie que define ζ converge para todo número complejo s con $\Re(s) > 1$ y diverge si s es real menor que 1. Apelando al teorema de Morera (o como prefieras) explica por qué la serie define una función holomorfa en $\Re(s) > 1$. Indicación: Si la última parte excede tus conocimientos de variable compleja, da un vistazo al teorema de Weierstrass en [1] o a §5.2 en el capítulo 2 de [6].

Un teorema general para cierto tipo de series complejas [5, Cor. 1.2] implica que la serie que define $\zeta(s)$ diverge para todos los números complejos $\Re(s) < 1$, no solo los reales. Esto sugiere que la serie solo nos permite definir ζ como "infinito" más allá de $\Re(s) > 1$. Sin embargo, resulta que hay una definición alternativa que permite ampliar su dominio y es en esa parte que "no vemos" con la serie donde radica la información sobre la distribución de los primos.

2) Demuestra para $\Re(s) > 1$ las igualdades

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{\lfloor x \rfloor}{x^{s+1}}\,dx = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s\int_1^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor - 1/2}{x^{s+1}}\,dx$$

donde $\lfloor x \rfloor$ significa la parte entera. La segunda debería resultarte fácil y la primera lo es menos.

[1] Lo habitual en el ámbito científico es leer ζ como *zeta*, pero según la RAE el nombre oficial es *dseta*. A pesar de la autoridad de la RAE, también indica *my* y *ny* como nombres de μ y ν cuando prácticamente todos los científicos usan *mu* y *nu*.

3) Explica por qué la última integral converge para $\Re(s) > 0$. Deduce que ζ se puede extender a una función meromorfa definida al menos en $\Re(s) > 0$ donde tiene un único polo en $s = 1$ que es simple y con residuo igual a 1.

Recuerda que por el llamado "principio de unicidad" [6, Ch. 2, §4], a lo más hay una posible extensión meromorfa a una región dada. Nadie puede venir con otra fórmula ingeniosa y obtener una extensión a $\Re(s) > 0$ que difiera de la obtenida. Con un poco más de esfuerzo, se puede llevar a cabo la extensión también a $\Re(s) > -1$ y repitiendo la idea incluso a $\mathbb{C}$. Como esto último lo haremos de otra forma en la siguiente hoja, nos contentaremos con el primer paso.

4) Explica por qué la función $g(x) = \int_1^x \left(t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}\right) dt$ está acotada en $\mathbb{R}$ y muestra que

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s(s+1) \int_1^\infty g(x) x^{-s-2}\, dx.$$

Concluye que ζ se también se puede extender a $\Re(s) > -1$ como una función meromorfa con un único polo en $s = 1$, que es simple.

A continuación vamos a ver algo bien curioso: a pesar de que $\sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ no converge en la franja $0 < \Re(s) < 1$, sus sumas parciales con un término adicional sirven para aproximar $\zeta(s)$. El siguiente ejercicio es un primer paso con este fin.

5) Con una variante de los razonamientos anteriores, muestra que para $N \in \mathbb{Z}^+$ y $\Re(s) > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{N^{-s}}{2} - s(s+1) \int_N^\infty g(x) x^{-s-2}\, dx.$$

Lo cual se extiende como función meromorfa a $\Re(s) > -1$.

Antes de seguir, vamos a estudiar con un poco más de detalle la función g.

6) Prueba que g es 1-periódica (si no lo has hecho ya), continua y que $g(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$ para $0 < x < 1$; de donde se sigue que es C^1 a trozos en cada intervalo finito. Estas condiciones aseguran que g tiene una serie de Fourier[2] que converge absolutamente a ella. Muestra que es

$$g(x) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{n^2} e^{2\pi i n x} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(2\pi n x)}{n^2}. \tag{1}$$

[2]Recuerda que la *serie de Fourier* de una función 1-periódica f es $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\, e^{2\pi i n x}$ con $f_n = \int_0^1 f(t)\, e^{-2\pi i n t}\, dt$ y coincide con f si es suficientemente regular. Dos buenas referencias si quieres repasar el análisis de Fourier son [2] y [4].

7) Para $n \in \mathbb{Z}-\{0\}$ sean $f_n(x) = 2\pi i n x - \Im(x)\log x$ y $h_n(x) = \big(f_n'(x)x^{\Re(s)+2}\big)^{-1}$. Partiendo de la identidad trivial $e^{2\pi i n x}x^{-s-2} = f_n'(x)\, e^{if_n(x)}h_n(x)$, comprueba las desigualdades siguientes para $\Re(s) > -1$ y $1 + \big|\Im(s)\big| \le N \in \mathbb{Z}^+$:

$$\Big|\int_N^\infty e^{2\pi i n x}x^{-s-2}\,dx\Big| \le \big|h_n(N)\big| + \int_N^\infty \big|h_n'(N)\big|\,dx = 2\big|h_n(N)\big|.$$

Indicación: Integra por partes y controla el signo de la derivada.

8) Usando los tres ejercicios anteriores, deduce que existe una constante C, que no hace falta que halles, tal que

$$\Big|\zeta(s) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{s-1}\Big| \le CN^{-\Re(s)}$$

para cualquier $0 < \Re(s) < 1$ y $N \ge 1 + |\Im(s)|$. En particular, las sumas parciales S_N de $\sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ convergen a $\zeta(s)$ en $0 < \Re(s) < 1$ cuando $N \to +\infty$ si las corregimos añadiendo $N^{1-s}/(s-1)$.

Terminamos esta hoja con el cálculo de algunos valores especiales relacionados con la función ζ. Antes de nada, vamos a introducir una constante que es posible que conozcas de algún curso del grado. Lo mismo ya has hecho el siguiente ejercicio en alguna asignatura.

9) Prueba que la serie $\sum_{n=1}^\infty \big(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\big)$ converge. Deduce que el límite

$$\lim_{N\to\infty}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} - \log(N+1)\Big)$$

existe y es finito. Su valor se llama *constante de Euler-Mascheroni* y se suele denotar con γ. Numéricamente es $\gamma = 0{,}57721\dots$ y no se sabe si admite una expresión sencilla. Indicación: Una posible manera de abordar la convergencia es utilizar el criterio de comparación escribiendo el paréntesis como $\int_0^1 \big(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\big)\,dx$ y acotando la integral.

Primero hagamos dos evaluaciones que son consecuencia inmediata de lo anterior.

10) Calcula $\zeta(0)$ y $F(1)$ con $F(s) = (s-1)\zeta(s)$. Si uno se pone muy riguroso, debe entender esta F como la extensión holomorfa de $(s-1)\zeta(s)$.

Nota que al tener ζ un polo simple en 1, se cumple que $\zeta(s) - 1/(s-1)$ permanece acotado cuando $s \to 1$. El siguiente ejercicio apura un poco más.

11) Demuestra que

$$F'(1) = \lim_{s\to 1}\Big(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\Big) = \gamma$$

justificando que el límite anterior es:

$$\frac{1}{2} - \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{x - \lfloor x\rfloor - 1/2}{x^2}\,dx = \frac{1}{2} - \lim_{N\to\infty}\Big(\log N - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2N}\Big) = \gamma.$$

Por último, veamos el valor especial de ζ que resuelve el problema de Basilea [7].

12) Utiliza (1) para obtener $\zeta(2) = \pi^2/6$. Recuerda o repasa la *identidad de Parseval* y aplícala para obtener $\zeta(4) = \pi^4/90$.

Para terminar, te cuento en esta letra pequeña algo más sobre valores especiales de ζ. Tómalo como algo opcional y menciona algo de ello en tu trabajo solo si llama tu atención y tienes espacio.

Las expresiones exactas para $\zeta(2)$ y $\zeta(4)$ no son una casualidad. Hay expresiones del mismo tipo para $\zeta(2k)$ con $k \in \mathbb{Z}^+$. Por otro lado, se desconocen para $\zeta(2k+1)$. Por ejemplo, no se sabe "evaluar" $\zeta(3)$. Una forma general de tratar el caso par es utilizar la identidad famosa de variable compleja (mira [3, (10)] para una prueba elemental):

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} - \frac{1}{z^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

El lado derecho tiene una extensión holormorfa a $z = 0$, porque existe el límite, y entonces admite un desarrollo de Taylor de la forma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{2k}$ que al ser comparado con el del segundo miembro permite evaluar $\zeta(2k)$.

13) [Opcional] Evalúa $\zeta(6)$ sabiendo que el desarrollo de Taylor del primer término es $\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^4}{15} z^2 + \frac{2\pi^6}{189} z^4 + \dots$

Los a_k están relacionados con los *números de Bernoulli* B_k, que quizá te suenen. Concretamente,

$$a_k = \frac{(2\pi)^{2k+2}|B_{2k+2}|}{(2k+2)(2k)!} \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ y de ahí,} \quad \zeta(2k) = \frac{(2\pi)^{2k}|B_{2k}|}{2(2k)!} \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}^+.$$

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. La extensión es libre con una fuerte recomendación de que no superes las 7 páginas, sin contar la bibliografía, con el formato de esta hoja o de la plantilla para que no tengamos que hacer muchos recortes al final. Es mucho más importante poner buenas explicaciones que detalles en los cálculos. El resultado debe dar lugar a un primer capítulo de tu TFG llamado *Propiedades analíticas básicas* o algo parecido.

Referencias

[1] F. Chamizo. Convergencia de funciones holomorfas. Variable Compleja II. `https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/1819vcII/resumenes/cnv.pdf`, Curso 2018/2019.

[2] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals.* Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.

[3] J. Hofbauer. A simple proof of $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ and related identities. *Amer. Math. Monthly*, 109(2):196–200, 2002.

[4] T. W. Körner. *Fourier analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2022. Reprint of [0924154], With a foreword by Terence Tao.

[5] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. *Multiplicative number theory. I. Classical theory*, volume 97 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[6] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[7] Wikipedia contributors. Basel problem — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Basel_problem&oldid=1229249253`, 2024. [Online; accessed 7-August-2024].