Nuestro objetivo es estimar integrales oscilatorias de la forma

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\, e\big(\lambda f(t)\big)\, dt$$

cuando $\lambda > 0$ es grande. Este es un problema natural en muchas situaciones de la física matemática. En términos físicos, a representa la *amplitud* y λf la *fase*, cuya variación (derivada) da la *frecuencia*. Aunque parece natural que ambas funciones tomen valores reales, solo lo supondremos para f porque la física cuántica sugiere considerar $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. No nos interesaremos por temas de regularidad, por ello supondremos $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $a \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ o $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, el espacio de *funciones de decaimiento rápido* que cumplen que ellas y sus derivadas son $O(x^{-k})$ para todo $k > 0$ [7]. Si f es una función lineal, $I(\lambda)$ se relaciona con la transformada de Fourier, que apareció en la hoja anterior. Concretamente, para $f(t) = -t$ se tiene $I(\lambda) = \widehat{a}(\lambda)$ que, como sabes, decae rápido. En esta hoja nos ocuparemos del caso no lineal en el que f puede tener puntos críticos. Antes de proceder, debes recordar dos fórmulas básicas del análisis de Fourier llamadas *fórmula de inversión* e *identidad de Parseval*:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e(-x\xi)\, d\xi \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f} g = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}}\widehat{g},$$

donde la barra indica el conjugado. La primera, invierte la transformada de Fourier, pues recupera f a partir de $\widehat{f}$. En principio son ciertas para $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ [1, §2.2], aunque modificando un poco el sentido de las integrales se pueden extender al espacio $L^2(\mathbb{R})$ de funciones de cuadrado integrable [1, §2.3] y, como veremos en el segundo ejercicio, incluso se aplican a funciones fuera de este espacio. Nosotros daremos estas fórmulas por conocidas sin adentrarnos en sus demostraciones ni en sus exigencias de regularidad.

Este primer ejercicio es solo para que practiques con la transformada de Fourier. Tú decides si lo reflejas en tu trabajo o no.

1) Calcula la trasformada de Fourier de la función característica de $[-1, 1]$ (la que vale 1 en este intervalo 0 en el resto) expresando el resultado como una función real. Utiliza el resultado y la identidad de Parseval para evaluar la integral $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\, dt$.

El caso de fases cuadráticas es muy importante en las aplicaciones y también, como veremos, en la teoría. Lo que vamos a demostrar con los dos ejercicios siguientes es:

Teorema 1. *Si $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $f(t) = t^2$ entonces para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$*

$$I(\lambda) = \frac{1+i}{2\sqrt{\lambda}} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a^{(2j)}(0)}{j!(8\pi)^j} (i\lambda^{-1})^j + O(\lambda^{-k-1/2}).$$

Aquí la O es una O_k (recuerda la hoja anterior) y no podemos hacer $k \to \infty$ sin arriesgarnos a que la serie no converja. Es lo que se llama una *desarrollo asintótico* [5].

2) Con lo que sabes de la integral de Fresnel, completando cuadrados, calcula la transformada de Fourier de $f(x) = e(-\lambda x^2)$ con $\lambda > 0$ y aplica la identidad de Parseval para obtener

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\, e\big(\lambda x^2\big)\, dx = \frac{1+i}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{a}(\xi)\, e\Big(-\frac{\xi^2}{4\lambda}\Big)\, dx \qquad \text{para cualquier} \quad a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

3) En la última integral aplica el teorema de Taylor para orden $2k-2$ en el origen a $e\big(-\xi^2/(4\lambda)\big)$ y utiliza derivadas sucesivas de la fórmula de inversión para completar una prueba del Teorema 1. Indicación: Recuerda que $e^z = \sum_{j=0}^{\infty} z^j/j!$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$, por tanto, $e(-\xi^2) = \sum_{j=0}^{\infty} (-2\pi i)^j \xi^{2j}/j!$.

Para practicar con el resultado, vamos aplicarlo a cierta ecuación diferencial que no admite solución en términos elementales (no es una expresión algebraica de las funciones que aparecen en una calculadora científica usual).

4) Comprueba que la solución $y = y(x)$ de la ecuación diferencial ordinaria

$$4y'' + 2xy' + y = 0,\ y'(0) = 0 \qquad \text{es} \quad y(x) = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^4} \cos(xt^2)\, dt$$

con C una constante arbitraria. Indicación: Empleando integración por partes, muestra que $I_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^4} t^{4k}\, dt$ satisface $4I_{k+1} = (4k+1)I_k$ para $k \ge 0$. Teniendo esto en cuenta, sustituye $\cos(xt^2)$ por su desarrollo de Taylor y comprueba que los coeficientes de x^k se cancelan cuando se sustituye en la ecuación la serie resultante para y.

5) Sea y_1 la solución correspondiente a $C = 1$. Usando el Teorema 1, aproxima $y_1(x)$ con un error de $O(x^{-5/2})$ cuando $x > 0$ es grande.

6) Empleando las capacidades de `sagemath` o `WolframAlpha` para la integración numérica calcula $y_1(25)$, $y_1(50)$ e $y_1(100)$ con unas cuantas cifras decimales[1] y halla, en cada caso, el error relativo de la aproximación del ejercicio anterior.

El Teorema 1 implica que para $f(x) = x^2$ el comportamiento asintótico de $I(\lambda)$ solo depende de lo que ocurre en un entorno del origen. La razón intuitiva es que la oscilación se detiene en el origen porque allí la frecuencia es cero, causando una falta de cancelación. La idea de que solo los puntos en los que la frecuencia es nula contribuyen significativamente a $I(\lambda)$ se llama, sobre todo en el ámbito de la física, *principio de fase estacionaria*. Es difícil encontrar enunciados matemáticos precisos en la literatura [2]. El que escribo a continuación es bastante general. Para $f(t) = t^2$ da una versión algo imprecisa del Teorema 1.

[1] El comando para integrales numéricas en $\mathbb{R}$ es `numerical_integral(f,-oo,oo)` con `sagemath`. El segundo número en la salida indica la precisión.

Teorema 2 (Principio de fase estacionaria)**.** *Sean $f \in C^\infty(I)$ con I un intervalo abierto y $a \in C_0^\infty$ con soporte incluido en I. Si f tiene un conjunto finito $\mathcal{C}$ de puntos críticos en I y son todos no degenerados*[2]*, entonces para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$*

$$I(\lambda) = \sum_{c\in\mathcal{C}} \frac{(1+s_c i)\, e\big(\lambda f(c)\big)}{\sqrt{2\lambda s_c f''(c)}} \sum_{j=0}^{k-1} a_j(c)\lambda^{-j} + O(\lambda^{-k-1/2}).$$

donde $s_c \in \{1,-1\}$ es el signo de $f''(c)$ y los $a_j(c)$ son expresiones que dependen de las derivadas de a y f en c con $a_0(c) = a(c)$.

Nota que aunque f solo esté definida en I, como el soporte de a está dentro de I, tiene sentido $\int_{-\infty}^{\infty} a(t)e\big(\lambda f(t)\big)\,dt$, con un pequeño abuso de notación, ya que cómo se defina f fuera de I no afecta a la integral.

Las series de Fourier motivan tener una versión del principio de fase estacionaria para funciones 1-periódicas integradas a lo largo de un periodo, digamos sobre el intervalo $[0,1]$.

Teorema 3. *Sean $a, f \in C^\infty(\mathbb{R})$ funciones 1-periódicas y supongamos que el conjunto $\mathcal{C}$ de puntos críticos de f en $[0,1]$ es finito, son todos no degenerados y $0, 1 \notin \mathcal{C}$, entonces $\int_0^1 a(t)\, e\big(\lambda f(t)\big)\,dt$ admite la misma fórmula que $I(\lambda)$ en el resultado anterior.*

La condición $0, 1 \notin \mathcal{C}$ no tiene mayor importancia porque si no se cumpliera consideraríamos la integral en $[\varepsilon, 1+\varepsilon]$, que tiene el mismo valor por la periodicidad.

Como aplicación, vamos a estimar una de las familias de funciones especiales más importantes de la física matemática, las *funciones de Bessel* de primera especie e índice entero:

$$J_N(\lambda) = \int_0^1 e\Big(\frac{\lambda}{2\pi}\sin(2\pi t) - Nt\Big)\,dt \qquad \text{con} \quad N \in \mathbb{Z}.$$

Aunque no lo parezca, son funciones reales (la parte imaginaria desaparece por cierta simetría en la integral). Literalmente hay libros enteros dedicados a estas funciones y sus variantes [4]. Por si tienes curiosidad, parte de su interés radica en que participan en expresiones para las soluciones de algunas EDP cuando hay simetría radial. También, resuelven la EDO de segundo orden $x^2y'' + xy' + (x^2 - N^2)y = 0$. El siguiente ejercicio muestra la aproximación clásica que dice que $\sqrt{\lambda}J_N(\lambda)$ a la larga se parece mucho a una función trigonométrica sencilla.

7) Deduce del Teorema 3

$$J_N(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\cos\Big(\lambda - \frac{\pi N}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) + O(\lambda^{-3/2}) \qquad \text{para } \lambda > 0 \text{ grande y } N \in \mathbb{Z} \text{ fijado.}$$

[2] Recuerda que c es punto crítico si $f'(c) = 0$ y es no degenerado si además $f''(c) \neq 0$.

8) El valor de $J_0(2024)$ con ocho cifras significativas es 0,017727756. Comprueba cuántos decimales correctos da el término principal de la fórmula del ejercicio anterior.

El resto de la hoja está dedicado a probar el Teorema 2 y el Teorema 3. Comenzaremos con algunas reducciones.

La primera es un poco trivial y es que el caso $\mathcal{C} = \emptyset$ está cubierto ya que si no hay puntos críticos la suma es vacía (y por tanto nula), f es monótona (f' no se anula) y el cambio $t = f(x)$ muestra que $I(\lambda)$ es como la trasformada de Fourier en $-\lambda$ de $a\big(f^{-1}(x)\big)/f'\big(f^{-1}(x)\big)$ y procediendo como en la hoja anterior, integrando sucesivamente por partes, se tiene $I(\lambda) = O(\lambda^{-k})$ para todo $k > 0$. El caso 1-periódico es similar.

9) Refleja en tu trabajo, con tus propias palabras y referencias al capítulo anterior, lo que quieras de esta explicación, añadiendo lo que consideres necesario si te parece que es insuficiente.

Una reducción mucho más sustancial es que solo hay que probar el Teorema 2.

10) Dado $c \in (0,1)$ y $\varepsilon > 0$ tal que $2\varepsilon < c < 1 - 2\varepsilon$, considera cualquier $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ que cumpla $\varphi(x) = 1$ si $x \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ y $\varphi(x) = 0$ si $x \notin [c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]$. Sea $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ definida por[3] $\psi(x) = \varphi\big(x - \lfloor x \rfloor\big)$ si $x \in [c, c+1]$ y $\psi(x) = 1$ si $x \notin [c, c+1]$. Explica por qué $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ y muestra que para cualquier $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ que sea 1-periódica se cumple

$$\int_0^1 F(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\varphi(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\big(1 - \psi(t)\big)\,dt.$$

11) Toma $c \in \mathcal{C}$ en el Teorema 3 y ε tal que $[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon] \subset [0,1]$ y $[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon] \cap \mathcal{C} = \{c\}$. Usando la fórmula del ejercicio anterior, prueba que el Teorema 2 implica el Teorema 3.

A ver si consigues hacer el siguiente ejercicio sin más indicaciones que la sugerencia de que uses para la primera parte particiones de la unidad [6] o funciones como la φ introducida antes y traslaciones para la segunda parte.

12) Explica por qué basta demostrar el Teorema 2 cuando $\#\mathcal{C} = 1$ y por qué, de hecho, se puede suponer $\mathcal{C} = \{0\}$ y $f(0) = 0$.

13) Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ con un punto crítico en el origen y $f(0) = 0$. Demuestra que existen $\varepsilon, \delta_1, \delta_2 > 0$ tales que la función

$$x(t) = t\sqrt{\frac{2f(t)}{t^2 f''(0)}} \quad \text{si } 0 < |t| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad x(0) = 0,$$

establece una biyección $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow (-\delta_1, \delta_2)$ con inversa $t = t(x)$ que es C^∞ y satisface

[3] Aquí $\lfloor x \rfloor$ indica la parte entera de x. Es decir, $x - \lfloor x \rfloor$ es x en $[c, 1)$ y $x - 1$ en $[1, c+1]$.

$t(0) = 0$, $t'(0) = 1$. En particular, si el soporte de a está incluido en $(-\delta_1, \delta_2)$, un cambio de variable lleva a

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} a\big(t(x)\big)t'(x)\, e\Big(\frac{\lambda}{2} f''(0)x^2\Big)\, dx$$

donde el integrando se define como cero si $|t| \geq \varepsilon$ (recuerda el pequeño abuso de notación del que te he hablado). Indicación: Si pruebas que $x(t)$ es derivable en cero con derivada 1, prácticamente todo se sigue del teorema de la función inversa en su versión unidimensional [3].

14) Efectuando todas las reducciones anteriores, aplica el Teorema 1 a la última integral y completa la demostración del Teorema 2. Para tratar el caso $f''(0) < 0$, ten en cuenta que $a(x)\, e(-\lambda x^2)$ es el conjugado de $\overline{a}(x)\, e(\lambda x^2)$ y haz con ello una versión del Teorema 1 con $\lambda \to -\infty$.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. Soy consciente de que , dependiendo de tus conocimientos previos en análisis, esta hoja te puede requerir bastantes explicaciones, por ello no me atrevo a sugerir una extensión. En caso de que no estés muy ducha en análisis y necesites muchas páginas recortaremos en alguno de los capítulos restantes. El resultado debe dar lugar a un segundo capítulo de tu TFG llamado *El principio de fase estacionaria* o algo parecido.

Referencias

[1] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals.* Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.

[2] C. D. Sogge. *Fourier integrals in classical analysis*, volume 210 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2017.

[3] M. Spivak. *Calculus Vol. I, II.* Editorial Reverté, Barcelona, 1984.

[4] G. N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Reprint of the second (1944) edition.

[5] Wikipedia contributors. Asymptotic expansion — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Asymptotic_expansion&oldid=1249739600`, 2024. [Online; accessed 21-October-2024].

[6] Wikipedia contributors. Partition of unity — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Partition_of_unity&oldid=1241002871, 2024. [Online; accessed 20-October-2024].

[7] Wikipedia contributors. Schwartz space — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Schwartz_space&oldid=1226063395, 2024. [Online; accessed 21-August-2024].