Esta hoja y las sucesivas, la previsión es que haya cinco en total, las iré poniendo en `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/tfg.html` donde se encuentra la propuesta inicial de los contenidos. La fuente LaTeX, en los ficheros `BS24hoja*.tex`, te será muy útil como plantilla y para poder copiar fórmulas y referencias. Más o menos imita el formato indicado en la guía docente. De todas formas, seguramente es más adecuado, para ahorrar tiempo, que las entregas de cada hoja las incluyas en la plantilla oficial del TFG que puedes descargar en Moodle.

El propósito de esta primera hoja es introducir algo de notación y dar los primeros resultados sobre la acotación de integrales oscilatorias. La herramienta fundamental que vas a aplicar a lo largo de toda la hoja es la integración por partes.

Respecto a la notación, usaremos la abreviatura

$$\boxed{e(x) \quad \text{para indicar} \quad e^{2\pi i x}}$$

la cual no es universal en análisis. Te recomiendo destacarla en tu trabajo y en tu presentación porque nada garantiza que esta notación sea familiar a quienes los vayan a juzgar. Usaremos también la *notación O de Landau* [4], que es bastante común y quizá te hayan contado en alguna asignatura. Con ella, se escribe $f = O(g)$ para indicar que

$$\limsup \Big| \frac{f(x)}{g(x)} \Big| < \infty.$$

Esto es como decir $|f| < K|g|$ para cierta constante K en la región en la que nos movemos. Por el contexto se suele sobreenteder a qué tiende la x en el límite anterior. Típicamente es a 0 o a ∞, casi siempre lo segundo en este trabajo. Si hay dudas, se indica. Hay otras dos notaciones dentro del mismo contexto que son $f = o(g)$ y $f \sim g$ y significan, respectivamente,

$$\lim \frac{f}{g} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim \frac{f}{g} = 1.$$

Por supuesto, $f = o(g)$ implica $f = O(g)$, pero no al revés. Estas expresiones aparecen a veces como sumandos. Por ejemplo $1 + O(x)$ significa $1 + f$ con $f = O(x)$. Así, $f \sim g$ se puede escribir como $f = g + o(g)$.

A continuación te propongo tres ejercicios para que practiques con esta notación. Si tienes dudas básicas te sugiero que mires el artículo de la wikipedia [4], que es bastante completo.

1) Explica las siguientes igualdades para $x \to +\infty$: $x^2 \cos x + x \log x = O(x^2)$, $\frac{4x+1}{2x+3} = 2 + O(x^{-1})$, $\int_2^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}$ y $e^{\sqrt{\log x}} = o(x^{0{,}01})$. Indicación: En algún caso puede resultar útil la regla de L'Hôpital.

Hay que tener precaución al combinar esta notación con derivadas e integrales.

2) Encuentra una función continua positiva que cumpla $f = O\big(x^{-2}\big)$ y, sin embargo, $\int_0^x f \ne O\big(x^{-1}\big)$. da también un ejemplo de $g = O\big(x^{-1}\big)$, $g \in C^1$, con $g' \ne O\big(x^{-2}\big)$.

Para practicar más con la notación O de Landau y acotar las primeras integrales oscilatorias, vamos a considerar dos de los objetos fundamentales del análisis de Fourier, que ya repasaremos. Sean

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e(-\xi x)\, dx \qquad \text{y} \qquad c_n(f) = \int_0^1 f(x)\, e(-nx)\, dx$$

donde $\xi \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

3) Fijado $k \in \mathbb{Z}^+$, prueba que si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ o es de decaimiento rápido [6] entonces $\widehat{f}(\xi) = O\big(|\xi|^{-k}\big)$ y que si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ es 1-periódica, entonces $c_n(f) = O\big(|n|^{-k}\big)$.

En acotaciones como las anteriores que dependen de un parámetro, a veces se escribe O_k para indicar que no podríamos conseguir $\big|\widehat{f}(\xi)\big| \le K|\xi|^{-k}$ para $|\xi|$ grande uniformemente en k sino que K o el rango donde vive ξ dependerá de k.

Ahora vamos con unos resultados para integrales oscilatorias más generales.

4) Sea $f \in C^2$ tal que f' no se anula en $[a, b]$. Muestra la igualdad

$$2\pi i \int_a^b e\big(f(x)\big)\, dx = g(b)\, e\big(f(b)\big) - g(a)\, e\big(f(a)\big) - \int_a^b g'(x)\, e\big(f(x)\big)\, dx \quad \text{con} \quad g(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

y deduce que si además f' es monótona (creciente o decreciente), entonces

$$\Big| \int_a^b e\big(f(x)\big)\, dx \Big| \le \pi^{-1}\big|f'(a)\big|^{-1} + \pi^{-1}\big|f'(b)\big|^{-1}.$$

En resumen, si $f \in C^2$ con f' monótona en el intervalo $[a, b]$ y satisfaciendo $|f'| \ge D_1 > 0$ allí, se cumple

$$\Big| \int_a^b e\big(f(x)\big)\, dx \Big| \le \frac{2}{\pi D_1}.$$

A esto, a veces con hipótesis ligeramente más débiles [3, §4.2] y otras constantes (la óptima se prueba en [1]) se le llama *primer lema de van der Corput*.

Si el ínfimo de $|f'|$ es pequeño, la cota anterior puede ser muy mala. Por ejemplo, para $\big| \int_{0{,}01}^{10} e\big(x^2\big)\, dx \big|$ daría cerca de 32, cuando la cota trivial, usando $\big|e(x^2)\big| = 1$, es menor que 10.

Una situación típica cuando surge este problema es que la derivada segunda no se anule y resulte útil el *segundo lema de van der Corput* que afirma que si $f \in C^2$ y $|f''| \ge D_2 > 0$ en el intervalo $[a, b]$, se cumple

$$\Big| \int_a^b e\big(f(x)\big)\, dx \Big| \le \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi D_2}}.$$

De nuevo, diferentes autores dan diferentes constantes. La demostración de este resultado es la combinación de los dos ejercicios siguientes.

5) Supongamos primero que f' se anula en cierto $x_0 \in [a,b]$ y sea $J = (x_0 - r, x_0 + r) \cap [a,b]$ con $r = (\pi D_2/2)^{-1/2}$. Usando el teorema del valor medio, prueba que si $t \in [a,b]$ cumple $|f'(t)| < \frac{2}{\pi} r^{-1}$ entonces $t \in J$. Demuestra las desigualdades

$$\Big| \int_a^b e\big(f(x)\big)\, dx \Big| \le \Big| \int_J e\big(f(x)\big)\, dx \Big| + \Big| \int_{[a,b]-J} e\big(f(x)\big)\, dx \Big| \le |J| + 2 \cdot \frac{2}{2r^{-1}} \le 4r$$

y deduce el segundo lema de van der Corput.

6) Explica por qué, incluso si la derivada no se anula en $[a,b]$, los $t \in [a,b]$ tales que $|f'(t)| < \frac{2}{\pi} r^{-1}$ caen dentro de un intervalo de longitud a lo más $2r$ y por tanto la prueba anterior es válida en general. Indicación: Quizá cambiando f por $-f$ se puede suponer $f' > 0$. Distingue los casos en que f' es creciente y decreciente.

Estos resultados se generalizan a $\int_a^b g(x)\, e\big(f(x)\big)\, dx$ con $g \in C^1$ a base de introducir un factor

$$G = |g(b)| + \int_a^b |g'(t)|\, dt.$$

Si g es monótona, $G \le 3 \max |g|$. Esencialmente G mide el tamaño y el número de extremos locales. Por si te suena, G está relacionado con el concepto de *variación* de una función [2].

7) Demuestra que bajo las hipótesis del primer y segundo lema de van der Corput se tiene, respectivamente,

$$\Big| \int_a^b g(x)\, e\big(f(x)\big)\, dx \Big| \le \frac{2G}{\pi D_1} \qquad \text{y} \qquad \Big| \int_a^b g(x)\, e\big(f(x)\big)\, dx \Big| \le \frac{4\sqrt{2}\, G}{\sqrt{\pi D_2}}.$$

Como aplicación de lo que hemos visto, vamos a obtener una aproximación de la *integral de Fresnel* que es la función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por[1]

$$F(x) = \int_0^x e(t^2)\, dt.$$

Aparece en algunos temas de física matemática, por ejemplo, en la teoría de la difracción. Lo que vamos a probar es que (para $x \to +\infty$)

$$F(x) = \frac{1+i}{4} + \frac{e(x^2)}{4\pi i x} + O\big(x^{-3}\big). \tag{1}$$

[1] Dependiendo de los autores, es común también llamar integral de Fresnel a F tras un cambio lineal, sobre todo a $\int_0^x e(t^2/4)\, dt$, o a sus partes real e imaginaria.

Es decir, a la larga, $M(x)=\frac{1+i}{4}+\frac{e(x^2)}{4\pi i x}$ aproxima muy bien a $F(x)$. Un poco de experimentación sugiere que esto es cierto incluso para valores no muy grandes, por ejemplo, $\big|F(15)-M(15)\big|$ es menor que dos millonésimas.

La fórmula (1) implica que la integral impropia $F(\infty)$ converge en sentido Riemann[2] y vale $\frac{1+i}{4}$. Los dos ejercicios siguientes se ocupan de esto. El segundo requiere algo de variable compleja y conocer $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$.

8) Prueba que $\lim_{x\to\infty} F(x)$ existe. Indicación: ¿Por qué basta ver que $\int_X^Y e(t^2)\,dt\to 0$ cuando $X,Y\to\infty$?

9) Para $x>0$, por la definición, $F(x)=\int_{\gamma_x} e(z^2)\,dz$ con $\gamma_x=\{0<\Re(z)<x,\ \Im(z)=0\}$ orientado hacia la derecha. Sea γ_x^* este camino girado $\pi/4$ en sentido positivo. Usando el teorema de Cauchy, muestra $\int_{\gamma_x} e(z^2)\,dz-\int_{\gamma_x^*} e(z^2)\,dz\to 0$ cuando $x\to\infty$ y calcula el límite de la segunda integral. Indicación: Si $z=re^{i\alpha}$ con $0\le\alpha\le\frac{\pi}{4}$ entonces $\big|e(z^2)\big|\le e^{-8r^2\alpha}$.

10) Explica la igualdad $4\pi i\int_x^\infty e(t^2)\,dt=-x^{-1}\,e(x^2)+\int_x^\infty t^{-2}\,e(t^2)\,dt$ y empléala junto con $F(\infty)=\frac{1+i}{4}$ para deducir (1).

11) En [5] puedes ver un dibujo de $\big\{F(t)\ :\ t\in\mathbb{R}\big\}$. La parte del primer cuadrante corresponde a $t>0$, la otra es simétrica porque $F(t)=-F(-t)$. Escribe unas líneas explicando la forma espiral a la luz del resultado que has obtenido.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. La extensión es libre con una fuerte recomendación de que no superes las 7 páginas con el formato de esta hoja o de la plantilla, sin contar la bibliografía, para que no tengamos que hacer muchos recortes al final. Es mucho más importante poner buenas explicaciones que detalles en los cálculos. Si ves que te pasas mucho, reduce todo lo que quieras la parte de la notación O de Landau, porque es bastante conocida. El resultado debe dar lugar a un primer capítulo de tu TFG llamado *Estimaciones básicas* o algo parecido.

Referencias

[1] Carlos A. Catalá de la Torre. A new proof for a sharp van der Corput's lemma. *Amer. Math. Monthly*, 122(2):138–142, 2015.

[2] Esto es, existe $\lim_{x\to\infty} F(x)$. No tiene sentido Lebesgue porque $\int_0^\infty |e(t^2)|\,dt=\infty$.

[2] W. Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[3] E. C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1986. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.

[4] Wikipedia contributors. Big O notation — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Big_O_notation&oldid=1239255217`, 2024. [Online; accessed 22-August-2024].

[5] Wikipedia contributors. Euler spiral — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler_spiral&oldid=1232819038`, 2024. [Online; accessed 23-August-2024].

[6] Wikipedia contributors. Schwartz space — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Schwartz_space&oldid=1226063395`, 2024. [Online; accessed 21-August-2024].