

De la hoja anterior quedó pendiente la prueba de la fórmula de valencia que abordaremos ahora. El resto está dedicado a definir la serie de Eisenstein de peso dos y estudiar sus propiedades.

Para mayor simplicidad, solo vamos a probar la fórmula de valencia en el subconjunto \mathcal{M}_k^* de $\mathcal{M}_k - \{0\}$ formado por las f que no tiene ceros en la frontera de \mathcal{D} y $f(z) \rightarrow c \neq 0$ para $\Im(z) \rightarrow +\infty$. En este subconjunto se escribe simplemente como

$$\sum_{z \in \mathcal{D}} n(f, z) = \frac{k}{12} \quad \text{para } f \in \mathcal{M}_k^*.$$

Por el principio del argumento esta fórmula es equivalente a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{D}} g = \frac{k}{12} \quad \text{con } g = \frac{f'}{f}$$

donde $\partial \mathcal{D}$ es la frontera de \mathcal{D} con la orientación positiva.

1) Escribe unas líneas explicando las dos afirmaciones anteriores.

2) Sea C la parte curva de $\partial \mathcal{D}$ con la orientación hacia la derecha. Explica por qué $\int_{\partial \mathcal{D}} g = \int_C g$. Demuestra que para todo $z \in \mathbb{H}$ con $f(z) \neq 0$ se cumple $z^{-2}g(-1/z) = kz^{-1} + g(z)$.

3) Justifica las igualdades y, con ello, termina la prueba de la fórmula de valencia para $f \in \mathcal{M}_k^*$:

$$2 \int_C g = \int_C g - \int_C g(-z^{-1})d(-z^{-1}) = -k \int_C \frac{dz}{z} = \frac{\pi k i}{3}.$$

Indicación: Nota que $z \mapsto -z^{-1}$ preserva C , pero cambia su orientación.

El problema para pasar de \mathcal{M}_k^* a $\mathcal{M}_k - \{0\}$ es que $\int_{\partial \mathcal{D}} g$ deja de tener sentido si f se anula en algún punto de $\partial \mathcal{D}$ y que también hay problemas de convergencia si g no se anula en el infinito. La solución es conceptualmente simple: lo único que se hace es modificar ligeramente el contorno $\partial \mathcal{D}$ para que evite los ceros de la frontera y por arriba se cierra con una línea horizontal muy alta $\{x + iN : |x| \leq \frac{1}{2}\}$ para eliminar los problemas de convergencia. La sugerencia es que no te metas en estos detalles en tu trabajo. No son difíciles, pero sí técnicamente engorrosos. Límitate a explicar la situación y a dar una referencia, por ejemplo a [3, §1.6.2], [1, Fig. 2.7] o [2, §1.5].

Ahora pasamos al tema intrínsecamente del capítulo 4. Por el primer problema de la primera hoja sabes que la definición natural de la serie de Eisenstein de peso 2 da lugar a una serie que no converge absolutamente. Resulta que cuando se impone un orden de sumación adecuado se tiene la convergencia (condicional). Curiosamente, el cambio de la convergencia absoluta por la condicional provoca que la serie de peso 2 tenga una ley de transformación diferente de la de las formas modulares.

Para $k > 2$ par, separando los términos con $m = 0$ en la definición de G_k ,

$$G_k(z) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{\vec{0}\}} (mz + n)^{-k} = 2\zeta(k) + \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (mz + n)^{-k}.$$

Por tanto, una definición natural de G_2 es

$$(1) \quad G_2(z) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (mz + n)^{-2}$$

donde aquí y en lo sucesivo entendemos $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$ como $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N$. Enseguida aclararemos por qué G_2 está bien definida. Se define también $E_2(z) = (2\zeta(2))^{-1} G_2(z) = 3\pi^{-2} G_2(z)$.

Por otro lado, el argumento usado para resolver el problema 4 de la hoja 2 (el cálculo de la serie de Fourier de G_k) no se ve alterado, gracias a que las exponenciales inducen un decaimiento que elimina los problemas de convergencia. Por tanto,

$$(2) \quad G_2(z) = \frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) e(nz).$$

Esta fórmula la puedes enunciar directamente en tu trabajo sin más explicaciones que incluir una referencia al capítulo 2. Si repasas la demostración, verás que en particular implica la convergencia de la serie doble en (1), porque el resultado de la suma interior tiene decaimiento exponencial, en particular, que G_2 está bien definida.

Utilizando (1) o (2) es bastante obvio que $G_2(z) = G_2(z+1)$. Parece que manipulando (1) uno debiera tener también $G_2(-1/z) = z^2 G_2(z)$. Sin embargo, dicha manipulación requeriría intercambiar el orden de sumación lo que no está permitido sin la convergencia absoluta. A pesar de que parece un problema técnico que arreglaría un analista sagaz con ε y δ , no es así. La relación $G_2(-1/z) = z^2 G_2(z)$ es incorrecta y debe ser reemplazada por otra con un término adicional. Ese es el propósito de los siguientes ejercicios. Tal término adicional vendrá dado por la serie

$$S(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \neq 0} a_n(mz) \quad \text{donde} \quad a_n(z) = (z + n - 1)^{-1} - (z + n)^{-1}.$$

Más adelante veremos que esta serie doble converge, por ahora dalo por supuesto.

El primer paso es un truco para forzar a que la serie de G_2 se vuelva absolutamente convergente. Es parte de un antiguo método introducido por Kummer para acelerar series [5].

4) Recordando que $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$ es $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N$ y usando que $\sum_n a_n(z)$ es una serie telescópica [7], explica la igualdad

$$(3) \quad G_2(z) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} ((mz + n)^{-2} - a_n(mz)).$$

El módulo del paréntesis grande en (3) es menor o igual que $C(m^2 + n^2)^{-1}|m|^{-1}$ con C una constante que depende de z , por ejemplo $C = y^{-3}(|z|^2 + 1)$ con $y = \Im(z)$. Como $\sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m^2 + n^2)^{-1}|m|^{-1}$ converge, la serie doble de (3) converge absolutamente para cualquier $z \in \mathbb{H}$. Si este razonamiento excede tus aptitudes con el análisis, basta con que lo intentes comprender aproximadamente y lo reflejes con tus palabras. Si, por el contrario, lo ves asequible, tienes este ejercicio opcional.

5) [Opcional] Completa los detalles del razonamiento anterior. Indicación: Se puede probar la desigualdad $yC|mz + n|^2 \geq m^2 + n^2$ asociándole una forma cuadrática en m y n .

Una vez garantizada la convergencia absoluta, ya somos libres de intercambiar el orden de sumación.

6) Demuestra que $G_2(-1/z) = z^2 G_2(z) - S(-1/z)$.

La sorpresa es que $S(z)$ se puede evaluar explícitamente. Para ello debes recordar la identidad que probaste al comienzo de la hoja 2.

7) La función $g(z) = -\pi \cot(\pi z) + z^{-1}$ se extiende a una función holomorfa en el abierto $\Omega = (\mathbb{C} - \mathbb{Z}) \cup \{0\}$ (esto debería resultarte casi evidente, si no lo es, escribe sobre ello). Con lo que aprendiste en la hoja 2 muestra que $\sum_{m \neq 0} (m + z)^{-2} = g'(z)$ para $z \in \Omega$.

8) Justifica las siguientes igualdades para cualquier $z \in \mathbb{H}$:

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty \sum_{m \neq 0} ((mz + n - 1 + t)^{-2} - (mz + n + t)^{-2}) dt \\ &= z^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (g(n/z) - g((n-1)/z)) = z^{-1} \lim_{N \rightarrow +\infty} (g(N/z) - g((-N-1)/z)). \end{aligned}$$

Nota que estas igualdades prueban, en particular, que $S(z)$ está bien definida, es decir, que la serie que la define converge, con el orden de sumación que se indica.

9) Muestra que el último límite es $2 \lim_{N \rightarrow +\infty} g(N/z)$, calcúlalo y, con todo lo anterior, deduce la ley de transformación

$$G_2(-1/z) = z^2 G_2(z) - 2\pi iz \quad \text{o, equivalentemente,} \quad E_2(-1/z) = z^2 E_2(z) - 6\pi^{-1} iz.$$

Habitualmente no es nada fácil hallar valores especiales explícitos no nulos de las series de Eisenstein. En ese sentido, la de peso dos es excepcional.

10) Calcula $G_2(i)$ y $E_2(i)$.

Una aplicación importante de la serie de Eisenstein G_2 es la siguiente espectacular fórmula producto debida a Jacobi para la función discriminante introducida en la hoja anterior:

$$(4) \quad \Delta(z) = \frac{1}{12^3} (E_4^3(z) - E_6^2(z)) = P(z) \quad \text{con} \quad P(z) = e(z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e(nz))^{24}.$$

La prueba será indirecta. Primero relacionaremos P con E_2 y deduciremos que $P \in \mathcal{M}_{12}$. Después usaremos lo que sabemos de la hoja anterior sobre la estructura de este espacio de formas modulares para mostrar debe coincidir con Δ .

11) Justifica las siguientes igualdades:

$$\frac{P'(z)}{2\pi i P(z)} = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e(nz)}{1 - e(nz)} = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) e(nz) = E_2(z).$$

12) Demuestra

$$z^{-2} \frac{P'(-1/z)}{P(-1/z)} = \frac{(z^{12}P(z))'}{z^{12}P(z)}.$$

Deduce de ello $P(-1/z) = Cz^{12}P(z)$ con C constante y que $P \in \mathcal{M}_{12}$. Indicación: Para librarte de la constante puedes considerar $z = i$.

13) Con la biyección $\mathbb{C} \times \mathcal{M}_k \rightarrow \mathcal{M}_{k+12}$ de la hoja anterior para $k = 0$ demuestra que las funciones P y Δ son proporcionales. Completa la prueba de (4) estudiando el coeficiente de $e(z)$ en sus desarrollos de Fourier. Indicación: Sustituyendo $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ y $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$, que puedes dar por supuesto [6], en los desarrollos de la hoja 2 puedes deducir $E_4(z) = 1 + 240 e(z) + \dots$ y $E_6(z) = 1 - 504 e(z) + \dots$ y, con ello, el coeficiente buscado.

Ramanujan [4] se percató de que una vez que se añade E_2 al conjunto de las series de Eisenstein, estas satisfacen unas ecuaciones diferenciales sencillas. Los dos últimos ejercicios muestran tal ecuación para la propia E_2 .

14) Demuestra que $\pi E_2^2 + 6iE_2' \in \mathcal{M}_4$ donde E_2' es la derivada de E_2 .

15) Concluye que la ecuación diferencial $6iy' + \pi y^2 = \pi E_4$ tiene a $y(z) = E_2(z)$ como una de sus soluciones.

Tarea a entregar. Una vez más, lo que se espera es que combines las soluciones en un documento. Ya sabes que lo relativo a la fórmula de valencia irá al capítulo anterior. El resto constituirá el cuarto capítulo de tu TFG llamado *El caso de peso 2* o la variante que prefieras. A estas alturas tendrás una idea de cuánto ocupa el trabajo en la plantilla. Teniéndolo en cuenta, condensa más o menos el resultado de esta hoja.

Referencias

- [1] T. M. Apostol. *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, volume 41 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.
- [2] H. Iwaniec. *Topics in classical automorphic forms*, volume 17 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [3] M. Masdeu. Modular forms (MA4H9). <https://mdave16.github.io/notes/Modular%20Forms%20-%20Marc%20Masdeu.pdf>, 2015.
- [4] S. Ramanujan. On certain arithmetical functions [Trans. Cambridge Philos. Soc. **22** (1916), no. 9, 159–184]. In *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, pages 136–162. AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2000.
- [5] Wikipedia contributors. Kummer’s transformation of series — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kummer%27s_transformation_of_series&oldid=1279130702, 2025. [Online; accessed 16-March-2026].
- [6] Wikipedia contributors. Particular values of the Riemann zeta function — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Particular_values_of_the_Riemann_zeta_function&oldid=1316608585, 2025. [Online; accessed 2-November-2025].
- [7] Wikipedia contributors. Telescoping series — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Telescoping_series&oldid=1328003665, 2025. [Online; accessed 16-March-2026].