

Las series de Eisenstein las habíamos definido como una suma doble de términos con un decaimiento potencial. La primera mitad de esta hoja la dedicaremos a mostrar que también se pueden expresar como una suma simple de términos con decaimiento exponencial en la parte imaginaria. La segunda mitad nos dará una interpretación geométrica de la acción de $SL_2(\mathbb{Z})$ sobre $\mathbb{H}$ que permite restringir la evaluación de las series de Eisenstein a un subconjunto de $\mathbb{H}$ en el que la nueva expresión tiene una convergencia muy rápida.

En esta hoja y las sucesivas aparecerán fórmulas en las que hay exponenciales con un factor $2\pi i$ en su argumento y también la suma de las potencias de los divisores de un número natural. Por eso, siguiendo una tradición, definimos las siguientes funciones para abreviar:

$$e(w) = e^{2\pi i w} \quad \text{y} \quad \sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

donde $w \in \mathbb{C}$ y $k, n \in \mathbb{N}$. Con $d|n$ se indican los divisores (positivos). Por ejemplo, $e(1/2) = -1$, $e(i) = e^{-2\pi}$, $\sigma_2(5) = 1^2 + 5^2 = 26$ y $\sigma_1(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$.

Para el primer ejercicio tienes que recordar un poco de las series de Fourier¹. La solución más natural prácticamente no tiene cálculos, a ver si das con ella.

1) Dado $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ sea $f(x) = \pi e(-rx)$ en $[-1/2, 1/2]$ y su extensión de periodo uno en el resto. Aplica la identidad de Parseval a f para obtener

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^2(\pi r)}{(r + n)^2} = \pi^2.$$

2) Explica brevemente por qué $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (z + n)^{-2}$ define una función holomorfa en $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Utiliza el ejercicio anterior y el principio de unicidad para demostrar

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z + n)^2} = -\frac{4\pi^2 e(z)}{(1 - e(z))^2} \quad \text{para } z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}.$$

Solo por si te interesa, hay también una forma de probar esta identidad utilizando técnicas de variable compleja comparando polos y residuos [1, §5.2].

3) Con lo que sabes de análisis o de funciones generatrices de Matemática Discreta, explica la igualdad

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z + n)^2} = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n e(nz) \quad \text{para } z \in \mathbb{H}.$$

¹Con la notación anterior, para f de periodo uno $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e(nx)$ con $a_n = \int_0^1 f(t) e(-nt) dt$ es su *serie de Fourier* y $\int_0^1 |f|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2$ es la *identidad de Parseval* [2], [3], [4].

Fíjate que por ejemplo para $z = i$ la serie de la izquierda converge despacio y la derecha converge rápido, como una serie geométrica.

4) Derivando sucesivas veces y sustituyendo z por mz después de derivar, deduce

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e(nz) \quad \text{para } k > 2 \text{ par}$$

y de aquí

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + 2 \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e(nz).$$

En principio, deberías saber justificar que no hay problemas de convergencia, pero como no es el objetivo principal, queda a tu elección cuántos y qué detalles incluir.

Esta nueva expresión para las series de Eisenstein se conoce como *desarrollo de Fourier* de G_k porque es una especie de serie de Fourier con argumento complejo. De hecho, si congelamos la parte imaginaria, es un desarrollo de Fourier en la parte real en el sentido habitual.

En la hoja anterior aproximamos un valor de G_4 que se reducía a $G_4(2025i)$. El siguiente ejercicio implica que la aproximación tiene, como se dijo, miles de cifras significativas correctas. Es un pequeño reto, a ver si consigues hacerlo sin más ayuda que la recomendación de que uses una acotación trivial para $\sigma_3(n)$.

5) Demuestra que $|G_4(2025i) - \pi^4/45| < 10^{-5523}$.

El resto de esta hoja está relacionada con el abierto

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{H} : |z| > 1, |\Re(z)| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Se dice que es un *dominio fundamental* para la acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sobre $\mathbb{H}$. Geométricamente esto significa que $\gamma\mathcal{D}$ con $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ embalsosa todo $\mathbb{H}$. Si quieres ver el aspecto de esta pavimentación, está, por ejemplo, en el apartado *Fundamental domain for the modular group*² de [5]. En términos matemáticos, lo que pedimos para que $\gamma\mathcal{D}$ se comporten como teselas es

$$a) \quad \mathcal{D} \cap \gamma\mathcal{D} = \emptyset \quad \text{para } \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) - \{\pm I\} \quad \text{y} \quad b) \quad \bigcup_{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \gamma\overline{\mathcal{D}} = \mathbb{H}$$

donde $\overline{\mathcal{D}}$ es el cierre de $\mathcal{D}$. Si no te parece claro que esto refleje la idea geométrica, piénsalo y escribe unas líneas sobre ello.

²Si te atreves a iniciarte en el complejo paquete TikZ puedes dibujarlo con L^AT_EX. Mira <https://tex.stackexchange.com/questions/113677/tikz-and-fundamental-domains>.

Para probar a) tenemos que ver que si $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ cumplen $z_2 = \gamma z_1$ con $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ entonces $\gamma \in \{\pm I\}$, que implica $z_1 = z_2$. Por la simetría ($z_2 = \gamma z_1$ equivale a $z_1 = \delta z_2$ con $\delta = \gamma^{-1}$), es lícito suponer $\Im(z_1) \leq \Im(z_2)$ que, según lo visto en el quinto ejercicio de la hoja anterior, se traduce en $|j_\gamma(z_1)| \leq 1$.

6) Prueba que si $\gamma_{21} = 0$ entonces se tiene $\gamma \in \{\pm I\}$, como queríamos. Si $\gamma_{21} \neq 0$ muestra que $|j_\gamma(z_1)| \leq 1$ con $z_1 \in \mathcal{D}$ implica $\gamma_{21} = \pm 1$ y, a partir de ello, $\gamma_{22} = 0$. Concluye $\gamma = T^n S^{\pm 1}$ y explica por qué esto contradice $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$.

Para obtener b) debemos mostrar que para cada $z \in \mathbb{H}$ existe $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tal que $\gamma z \in \overline{\mathcal{D}}$.

7) Fijado $z \in \mathbb{H}$, sea $\gamma_0 = \{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : |j_\gamma(z)| \text{ es mínimo}\}$. Demuestra

$$\Im(T^n \gamma_0 z) = \Im(\gamma_0 z) \geq \Im(ST^n \gamma_0 z) = \frac{\Im(T^n \gamma_0 z)}{|T^n \gamma_0 z|^2} \quad \text{para cualquier } n \in \mathbb{Z}.$$

Deduces $|T^n \gamma_0 z| \geq 1$ y explica por qué eligiendo adecuadamente n se tiene $T^n \gamma_0 z \in \overline{\mathcal{D}}$.

Recordando la manera en la que probamos $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle T, S \rangle$, se puede deducir el siguiente algoritmo que dado un $z \in \mathbb{H}$ encuentra $w = \gamma z \in \overline{\mathcal{D}}$ con $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

Consideramos $n \in \mathbb{Z}$ tal que $|\Re(T^n z)| \leq \frac{1}{2}$. Si $|T^n z| \geq 1$ el algoritmo termina, si no, se repite el procedimiento con $ST^n z$.

De hecho, analizando este algoritmo se podría dar una solución del ejercicio anterior. Es solo un comentario, no hace falta que escribas nada sobre ello. Por otro lado, queda a tu arbitrio poner o no algo acerca de la justificación del algoritmo, en particular, por qué termina siempre.

Dependiendo de tu habilidad programando, quizá te sea más fácil resolver el siguiente problema con el opcional. Como prefieras.

8) Halla un $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tal que $\gamma\left(\frac{427}{117} + \frac{i}{39}\right) \in \overline{\mathcal{D}}$.

9) [Opcional] Escribe unas líneas de código en `sage` o en tu lenguaje de programación preferido que, implementando el algoritmo anterior, dado $z \in \mathbb{H}$ devuelva un w y un $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tales que $w = \gamma z \in \overline{\mathcal{D}}$.

Si no sabes cómo incluir un listado de código en un documento `LATEX`, en <https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/enlaces.html> hay una plantilla.

Ahora estamos en condiciones de entender totalmente el párrafo inicial de esta hoja.

10) Escribe en unas 6 líneas cómo aproximar con precisión $G_k(z)$ para cualquier z , explicando que, con la notación del ejercicio anterior, se cumple $G_k(z) = j_\gamma^{-k}(z)G_k(w)$ y que el desarrollo de Fourier aproxima muy bien $G_k(w)$ porque $\Im(w) \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

11) Encuentra una aproximación de $E_6\left(\frac{189+25i}{68}\right)$ con un error absoluto menor que 10^{-4} .
Nota: En $[6]$ tienes $\zeta(6) = \pi^6/945$ y otros valores de $\zeta(2n)$.

Tarea a entregar. Como en la entrega anterior, debes escribir un documento de extensión libre (aunque con la recomendación de no superar seis páginas, sin contar bibliografía ni el código del último ejercicio) que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. El resultado dará lugar al segundo capítulo de tu TFG bajo el título *El desarrollo de Fourier* o la variante que prefieras.

Referencias

- [1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.
- [2] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals*. Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.
- [3] G. B. Folland. *Fourier analysis and its applications*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1992.
- [4] T. W. Körner. *Fourier analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2022. With a foreword by T. Tao.
- [5] Wikipedia contributors. Fundamental domain — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fundamental_domain&oldid=1307704781, 2025. [Online; accessed 2-November-2025].
- [6] Wikipedia contributors. Particular values of the Riemann zeta function — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Particular_values_of_the_Riemann_zeta_function&oldid=1316608585, 2025. [Online; accessed 2-November-2025].