Esta hoja y las sucesivas serán publicadas poco a poco en `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/tfg.html` donde se encuentra la propuesta inicial de los contenidos. La previsión es que haya cinco en total. La fuente LaTeX, en los ficheros `AS25hoja*.tex`, te será muy útil como plantilla y para poder copiar fórmulas y referencias. Más o menos imita el formato indicado en la guía docente. De todas formas, seguramente es más adecuado, para ahorrar tiempo, que las entregas de cada hoja las incluyas en la plantilla oficial del TFG que puedes descargar en Moodle.

Comenzamos con la definición básica de todo tu trabajo. Las *series de Eisenstein* son funciones $G_k : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, del semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ a los complejos, definidas como

$$G_k(z) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{\vec{0}\}} \sum (mz+n)^{-k} \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}_{>2} \text{ par.}$$

Se dice que k es el *peso* de la serie de Eisenstein. Así G_{2026} es la serie de Eisenstein de peso 2026. Es habitual en varios contextos considerar también las *series de Eisenstein normalizadas*

$$E_k(z) = \frac{1}{2\zeta(k)} G_k(z) \qquad \text{con} \quad \zeta(k) = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots$$

Seguramente te preguntes a qué viene "normalizar" multiplicando por una constante tan extraña. Lo veremos en la próxima hoja. Si buscas bibliografía por tu cuenta, debes saber que algunos autores (por ejemplo [6]) introducen un factor $1/2$ en la definición de G_k y consecuentemente la constante en E_k pasa a ser $1/\zeta(k)$.

Antes de nada, unos comentarios sin entrar en detalles acerca de la limitación de los pesos a los pares mayores que 2. Los pesos no enteros causarían cierta ambigüedad en el argumento de los términos de la serie. Por ejemplo, para $k = 10/3$, $w^{-k} = \sqrt[3]{w^{-10}}$ tiene tres posibles valores, cada una de las tres raíces cúbicas. Enseguida probaremos que G_k es absolutamente convergente para $k > 2$ mientras que no lo es para $k \le 2$ lo cual sugiere olvidarse de este último caso (en cierto punto veremos una manera de redefinir G_2 a costa de perder algunas propiedades). Finalmente, no tiene mucho sentido considerar $k > 2$ impar, porque es fácil comprender que G_k sería idénticamente cero en ese caso. Si no lo ves claro, piénsalo.

El primer tema matemático va a ser la convergencia y la holomorfía. Dependiendo de tu habilidad con el análisis esto te puede resultar más o menos difícil. Si los dos ejercicios siguientes te parecen inasequibles, pregunta o da un vistazo a [1]. Estos resultados nos servirán solo para establecer el marco de trabajo. No volveremos a ellos.

1) Explica por qué $\sum\sum |mi+n|^{-2} = \sum\sum (m^2+n^2)^{-1}$ con $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ no converge y deduce que G_k no está bien definida como una serie absolutamente convergente para $k \le 2$. Indicación: Considera la contribución de $m^2 \le n^2 < (2m)^2$.

Para el siguiente tienes que recordar algún teorema de convergencia de funciones holomorfas. Mira [3] o [4] si es necesario.

2) Demuestra que $\sum\sum |mz+n|^{-2-2\varepsilon}$ con $(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}$ converge para cualquier $z\in\mathbb{H}$ y cualquier $\varepsilon>0$. Deduce de ello que G_k es holomorfa en $\mathbb{H}$ para cada $k>2$ par. Indicación: Fijado z, si C es el mínimo de la función $f(a,b)=|az+b|^2$ en la circunferencia unidad, se cumple $C>0$ y $|mz+n|^{-2-2\varepsilon}\le C^{-1-\varepsilon}(m^2+n^2)^{-1-\varepsilon}$.

Una vez establecida la convergencia absoluta, estamos autorizados a hacer cálculos término a término y a reordenarlos. En lo sucesivo, supondremos, si no se dice lo contrario, que k es un peso válido, en el sentido de que está en $\mathbb{Z}_{>2}$ y es par. La propiedad de las series de Eisenstein más importante es que gozan de dos simetrías. Una es la periodicidad y otra más extraña, ambas muy fáciles de probar.

3) Demuestra que las series de Eisenstein cumplen

$$G_k(z+1)=G_k(z) \qquad \text{y} \qquad G_k(-1/z)=z^kG_k(z).$$

Comprueba además, que estas operaciones, $z\mapsto z+1$ y $z\mapsto -1/z$, son biyectivas en $\mathbb{H}$.

El siguiente es un ejercicio opcional sin tiene importancia para nuestros propósitos, pero te puede ayudar a entender las manipulaciones con la serie de G_k. Es una expresión para E_k sin constantes raras.

4) [Opcional] Denotando con gcd el máximo común divisor, demuestra que

$$E_k(z)=1+\sum_{\substack{m=1\\ \gcd(m,n)=1}}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(mz+n)^{-k}.$$

Combinando las dos simetrías, podemos establecer muchas otras, por ejemplo,

$$G_k\Big(\frac{2z+1}{z+1}\Big)=G_k\Big(-\frac{1}{z+1}+1+1\Big)=G_k\Big(-\frac{1}{z+1}\Big)=(z+1)^kG_k(z+1)=(z+1)^kG_k(z).$$

La teoría de series de Eisenstein surgió justamente del estudio de funciones de variable compleja que tenían muchas simetrías, en principio ligadas a ciertas integrales llamadas elípticas [2]. El resto de la hoja está dedicado a establecer un contexto algebraico para las simetrías.

Para R un anillo conmutativo con unidad se define el grupo (con la multiplicación)

$$\mathrm{SL}_2(R)=\big\{\gamma\in\mathcal{M}_{2\times 2}(R)\,:\,\det(\gamma)=1\big\}$$

donde $\mathcal{M}_{2\times 2}(R)$ son las matrices 2×2 con elementos en R. Nosotros vamos a considerar los casos $R=\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$. Obviamente $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es un subgrupo de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Se define una *acción* [5] del grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{H}$ como

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ z & \longmapsto & \gamma z \end{array} \qquad \text{donde} \quad \gamma z = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{con} \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Al denominador de γz, con la notación anterior $cz+d$, se le denota $j_\gamma(z)$.

5) Demuestra que $\Im(\gamma z) = |j_\gamma(z)|^{-2}\Im(z)$ y por tanto $\gamma z \in \mathbb{H}$ para $z \in \mathbb{H}$ (la acción está bien definida). Prueba también que es una acción en el sentido algebraico, esto es, que $Iz = z$ y que $\gamma_1(\gamma_2 z) = (\gamma_1\gamma_2)z$ para $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

6) Demuestra la llamada *condición de cociclo* $j_{\gamma_1\gamma_2}(z) = j_{\gamma_1}(\gamma_2 z)j_{\gamma_2}(z)$. Deduce de ello que si una función $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ satisface $f(\gamma_j z) = j^k_{\gamma_j}(z)f(z)$ para $j = 1, 2$ entonces también lo satisface cambiando γ_j por cualquier $\gamma \in \langle\gamma_1, \gamma_2\rangle$, el grupo generado por γ_1 y γ_2.

Nota que γ y $-\gamma$ actúan de la misma forma, en álgebra se dice que la acción no es *fiel.* Para que lo sea, a veces se considera $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$ en lugar de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

De cara a las series de Eisenstein, el grupo importante es $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, llamado *grupo modular* (muchos autores reservan este nombre para su cociente por $\{\pm I\}$). Un resultado básico y relativamente sencillo es que el grupo modular está generado por las matrices

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que representan una traslación unidad y una inversión actuando sobre $\mathbb{H}$. La primera tiene orden infinito mientras que la segunda tiene orden 4, aunque S^2 actúa como la identidad.

7) Notando que

$$S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad T^n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+cn & b+dn \\ c & d \end{pmatrix},$$

demuestra que para cualquier $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ con $\gamma_{11}\gamma_{21} \neq 0$, el valor de $\min\big(|\gamma_{11}|, |\gamma_{21}|\big)$ se puede reducir premultiplicando por T^nS o por T^n, eligiendo un $n \in \mathbb{Z}$ adecuado.

8) Si $\gamma_{11}\gamma_{21} = 0$, prueba que $\gamma \in \langle T, S\rangle$.

9) Deduce de los ejercicios anteriores $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle T, S\rangle$. Para comprobar que lo has entendido, expresa $\left(\begin{smallmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ como producto de potencias de T y S.

10) Explica por qué con lo aprendido en los ejercicios anteriores, se tiene inmediatamente $G_k(\gamma z) = j^k_\gamma(z)G_k(z)$ para todo $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Nota: Esta igualdad admite también una prueba con cálculos, pero es más instructivo y sencillo que apeles a lo anterior.

El último ejercicio es un mero ejemplo sin mayor importancia para que practiques. Debes saber que $\zeta(4)=\pi^4/90$, que quizá te haya aparecido en algún curso de análisis (se obtiene con variable compleja o con series de Fourier). En cualquier caso, volveremos sobre ello.

11) Explica por qué $G_4(2025i)$ es aproximadamente $\pi^4/45$. No hace falta que acotes el error a no ser que tengas interés en hacerlo. Relaciona $G_4(z)$ con $G_4\big((z-2)/(5z-9)\big)$ y utiliza el resultado para aproximar $G_4\big(\frac{2\,278\,127}{11\,390\,634}+\frac{25i}{1\,265\,626}\big)$.

De la teoría de la próxima hoja se puede deducir que la aproximación obtenida en el ejercicio anterior es sorprendentemente precisa, con una precisión de miles de cifras significativas.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine las soluciones de los ejercicios anteriores. Enuncia los resultados como teoremas, proposiciones, etc. cuando lo consideres conveniente. Ten en cuenta que el TFG consiste en aprender un tema y, sobre todo, redactarlo bien. La extensión es libre con la recomendación de que no superes cinco páginas con el formato de esta hoja o de la plantilla, sin contar la bibliografía. No pongas todos los detalles en los cálculos, únicamente lo suficiente para seguir los razonamientos. El resultado será el primer capítulo de tu TFG llamado *Definiciones básicas y el grupo modular* o algo parecido.

Referencias

[1] T. M. Apostol. *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, volume 41 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[2] J. V. Armitage and W. F. Eberlein. *Elliptic functions*, volume 67 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[3] F. Chamizo. Convergencia de funciones holomorfas. `https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/1819vcII/resumenes/cnv.pdf`, 2019.

[4] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[5] Wikipedia contributors. Group action — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Group_action&oldid=1304854793`, 2025. [Online; accessed 15-August-2025].

[6] D. Zagier. Elliptic modular forms and their applications. In *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, pages 1–103. Springer, Berlin, 2008.